TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 144-Fevereiro-1944

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMERCIO, 56, 3.º
LISBOA

Granulados de mármores
para exportação e para o país

Mosaicos de granulados de mármore

OS MAIS BONITOS
OS MAIS RESISTENTES
OS MAIS VANTAJOSOS

Soc. Portuguesa CAVAN

Rua D. Estefania, 42
Telefone 47812 — Lisboa

FILIAL NO PÔRTO:
PRAÇA DA BATALHA, 90, 2.º

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS
REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

NÚMERO
144
Fevereiro — 1944

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N./ TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
JOSÉ DE LUCENA
ADMINISTRADOR
FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES
BIBLIOTECÁRIO
ANTÓNIO BUSTORFF
CORPO REDACTORIAL
Eduardo de Abreu Nunes
Jorge Trigo Mira
Manuel dos Santos Rézio
António da Silva Salta
Luíz Pinto Elyseu
Secção de Publicações
Fernando Blanqui Teixeira

NÚMERO AVULSO 6$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	16$00	30$00	58$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	40$00	70$00
Estrangeiro...	—	45$00	80$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ESTUD. DO I. S. T

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

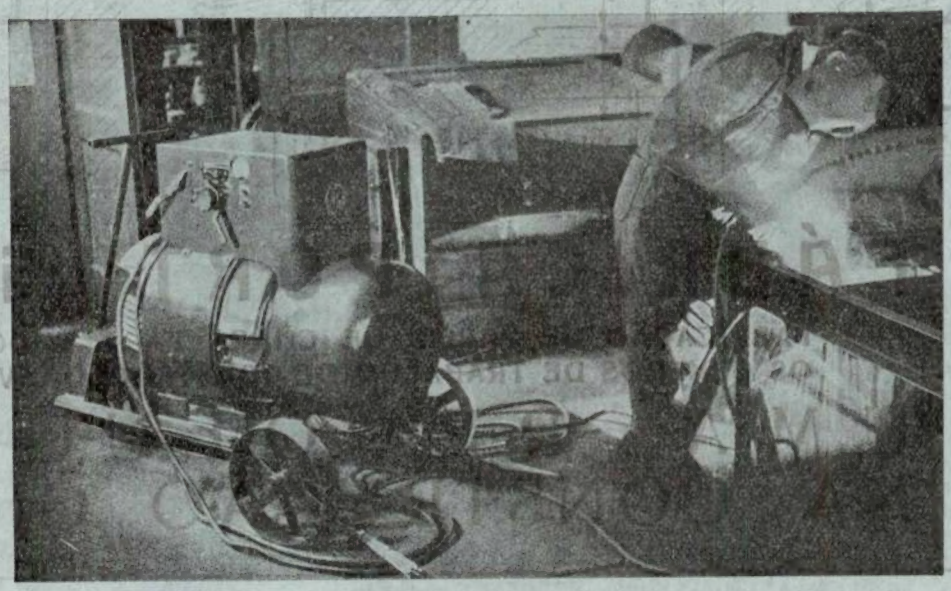
CAPA — Fase recente das obras do Pôrto de Luanda.

		Págs.
Erros e compensações no apoio dos levantamentos topográficos	Eng.º Carvalho Xerez	673
Diversos sistemas de telefonia aplicada nas rêdes de distribuïção eléctrica	Eng.º E. Michez	698
A fibra de vidro como isolante térmico e acústico na construção	Eng.º J. Gil Montero	702
Fiscalização de Obras Públicas	Eng.º Horácio de Moura	705
Engenharia e Estética	Nuno Teotónio Pereira	716
Cálculo de suportes ao varejamento	6.º ano do Curso de Engenharia Civil	721
Do Mundo Técnico		726
Notas bibliográficas		731
Publicações recebidas		731

STABILO
STABILO
STABILO
STABILO
STABILO
SCHWAN
Bleistift-Fabrik A.-G.
NÜRNBERG
Lápis de desenho
em 18 graduações 7 B — 9 H
Lápis de côr
O utensílio precioso em 24 côres
Novidade: STABILO Cellomin D. R. P.
O lápis-tinta com a mina especial
resistente às influências climáticas
Representante:
A. Ferreira da Silva, Pôrto.
Rua Alexandre Braga, 82. Tel. 6132

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Instalação de soldadura eléctrica com grupo rotativo

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Condutores eléctricos. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas. Emissores e receptores para T. S. F. Aparelhagem de Electro-Medicina. Instalações de Som.

THOMSON
GENERAL ELECTRIC

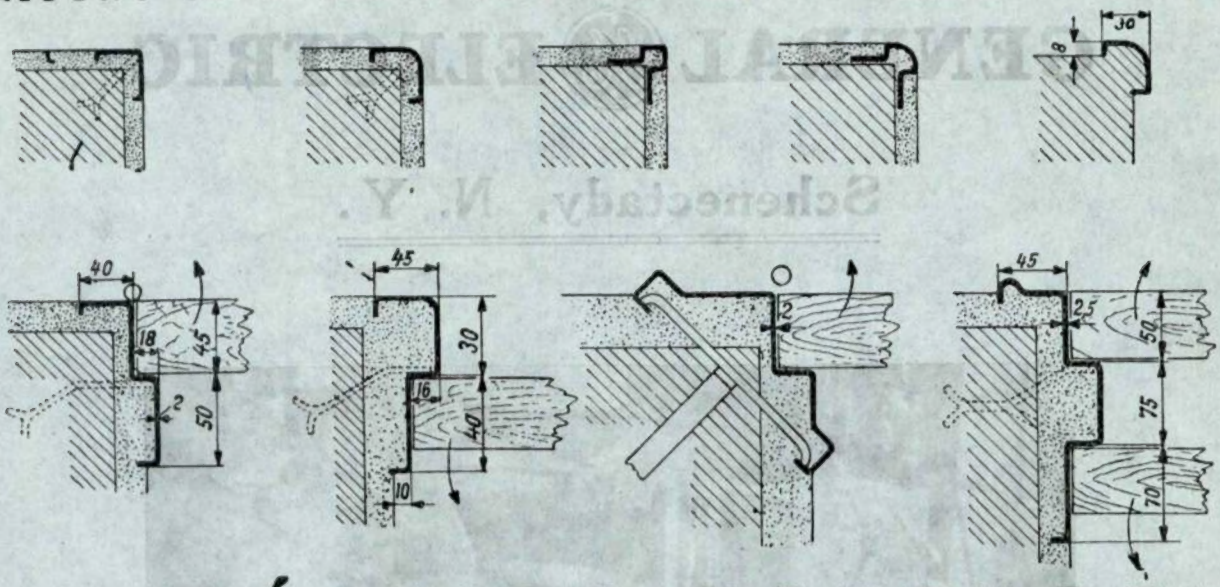
Portuguesa, L.da

LISBOA

Telef. 28135-28136

Rua do Norte, 5

ALGUNS EXEMPLOS DOS PERFIS QUE SE PODEM REALIZAR



LISBOA **FÁBRICA PORTUGAL**

FABRICAÇÃO DE PERFIS DE CHAPA PARA TODOS OS GENEROS DE TRABALHO DE CONSTRUÇÃO CIVIL

UMA REVOLUÇÃO NA CONSTRUÇÃO CIVIL

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas

Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico

Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.

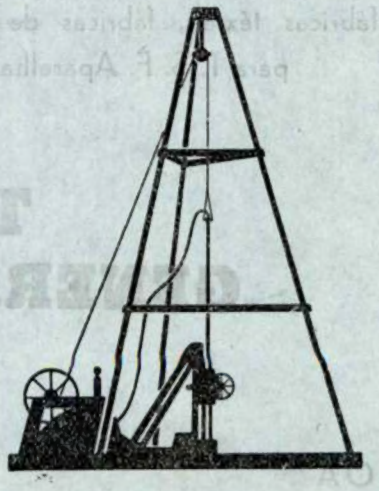
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo

Rebocos comprimidos por «**cement gun**»

Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no paiz e no estrangeiro



Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2°—LISBOA Tel. 2 8685

TÉCNICA

JOSÉ DE LUCENA
DIRECTOR

ANO XIX - N.º 144 FEVEREIRO 1944

Erros e compensações no apoio dos levantamentos topográficos

PELO ENGENHEIRO CARVALHO XEREZ

De uma tão imerecida como generosa apreciação que se fêz sôbre o nosso modesto préstimo, resultou a tarefa de produzir umas lições de Topografia. São agora publicadas algumas delas, porque, embora proferidas para estudantes de engenharia, não deixarão de interessar aos engenheiros, especialmente ao civil, pois se êste técnico não tem, em geral, de efectuar levantamentos, deve, na grande maioria dos casos, orientar a sua execução; além disso, os trabalhos de estudo e implantação de estradas, caminhos de ferro, barragens, pontes, canais, túneis, etc., tem êle próprio de os dirigir e até executar. Ora, em todos êsses problemas, há sempre necessidade de estabelecer triangulações de apoio, cuja precisão é conveniente estudar de acôrdo com a sua finalidade. Os erros de que pode estar eivado o trabalho de apoio e o modo de ajustar as observações, por métodos simples e expeditos, sempre suficientes ao fim em vista, são o objecto principal dêste artigo, a que se deu uma forma sucinta, sem descer a todos os pormenores de elucidação, que nas lições houve a frizar.

Antes de entrar pròpriamente no problema mais geral das triangulações de apoio de levantamentos ou de outros quaisquer trabalhos do engenheiro, convém examinar as condições de precisão e compensações relativamente aos problemas simples da determinação de coordenadas por intersecções directas, inversas e triângulos.

Intersecção directa

Neste problema, a posição planimétrica de um vértice P é obtida por intermédio de observações azimutais feitas, para êle, de dois ou mais vértices, A e B, de posição conhecida (fig. 1).

A precisão dêste método é função dos erros cometidos nas observações azimutais e, para determinados valores daqueles erros, depende, também, do comprimento dos lados AP e BP e do ângulo de intersecção α.

O comprimento dos lados intervém no valor do deslocamento lateral da direcção, junto ao vértice a determinar, o qual é proporcional àquele comprimento, podendo representar-se a *sensibilidade do lado*, isto é, o deslocamento d correspondente a uma variação de 1'' no seu azimute, por $d = D \operatorname{sen} 1''$,

em que D é o comprimento do lado. Se fôr $\pm$ e'' o êrro máximo na direcção, o deslocamento lateral correspondente será $\pm$ D *sen* $1''$. e'' .

Marcando, à direita e à esquerda dos lados, rectas paralelas e a distâncias dêles iguais

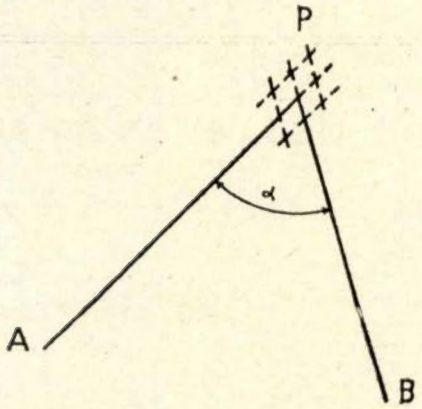


Fig. 1

aos valores dos deslocamentos, correspondentes aos erros máximos nas direcções, obtém-se um paralelogramo, que representa a área de dispersão das posições possíveis do vértice a determinar. Esta área de dispersão será mínima quando, como é evidente, o paralelogramo se transformar num rectângulo, isto é, para um ângulo de intersecção igual a 100 grados. Na prática, consideram-se para limites do ângulo α os valores 50 e 150 grados.

Em face do exposto, conclui-se que, no problema da intersecção directa, é necessário tomar em consideração os limites do ângulo de intersecção e também os comprimentos dos lados, cujos valores devem estar de acôrdo com a precisão a atingir na determinação das coordenadas do vértice, e ser tanto menóres quanto mais o ângulo α se afastar de 100 grados.

Intersecção inversa

A posição do vértice P é obtida por intermédio de observações horizontais, feitas, dêle, para 3 ou mais vértices de posição conhecida. A determinação das suas coordenadas resulta da intersecção (fig. 2) dos dois segmentos capazes dos ângulos α e β, estabelecidos sôbre os lados conhecidos AB e BC.

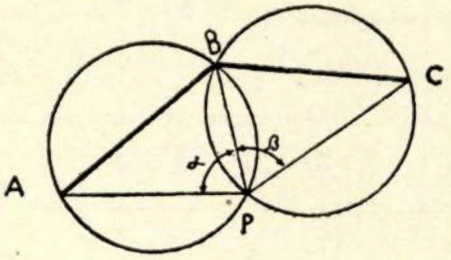


Fig. 2

As condições de precisão dêste método dependem dos erros cometidos na determinação dos ângulos α e β e, também, do ângulo de intersecção dos segmentos capazes e da sua sensibilidade.

A precisão deminui à medida que êste ângulo se afasta de 100 grados, podendo existir uma indeterminação completa se o ângulo é nulo, isto é, quando os dois segmentos capazes se confundem (os 4 vértices encontram-se então sôbre uma circunferência).

A *sensibilidade de um segmento capaz* é o deslocamento dêsse segmento, junto ao ponto P, correspondente a uma variação de $1''$ no ângulo.

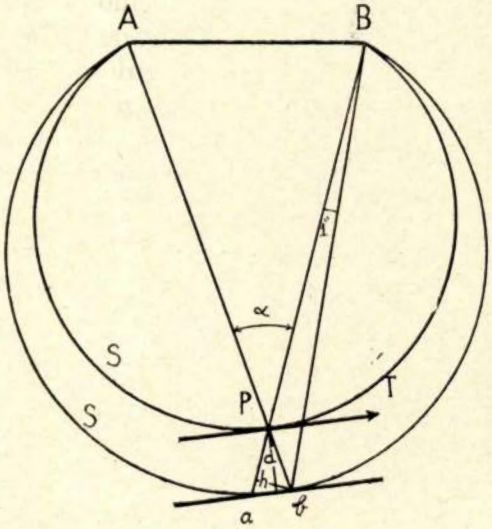


Fig 3

Consideremos (fig. 3) o segmento S capaz do ângulo α , o qual, na vizinhança de P, se confunde com a tangente T nesse ponto.

Sob a influência da variação de 1'' no ângulo, o segmento desloca-se para S' e na vizinhança em questão pode confundir-se com a corda $a\,b$, paralela à tangente T.

A sensibilidade é, pois, medida pela distância entre T e $a\,b$, que se designa por d, e fàcilmente se determina. Com efeito, no triângulo Pab, temos:

$$d = \frac{Pa}{ab} \cdot h ,$$

em que h é a altura do triângulo, perpendicular a Pa.

Como os triângulos PAB e Pab são semelhantes, por terem os 3 ângulos iguais, e $h = PB \,.\, sen\ 1''$, temos, finalmente:

$$d = \frac{PA \,.\, PB}{AB} \operatorname{sen} 1'' ,$$

isto é, um segmento capaz pode considerar-se equivalente a uma visada de intersecção fictícia, partindo de um ponto situado sôbre a tangente T à distância $\frac{PA \,.\, PB}{AB}$.

Como a precisão é inversamente proporcional à sensibilidade, ela será tanto maior quanto menor fôr o produto $PA \,.\, PB$ relativamente a AB.

Portanto, na escolha das melhores condições para uma intersecção inversa é necessário não só atender ao ângulo de intersecção dos segmentos capazes, mas também aos valores das distâncias PA, PB e AB de modo a obter-se uma pequena sensibilidade.

Triângulo

Neste caso observam-se os três ângulos do triângulo e, em virtude dos erros cometidos, é necessário, depois de fazer a compensação de estação, resolver um problema de observações condicionadas, cuja equação de condição exprime que a soma dos ângulos de um triângulo deve ser igual a 200 grados (na hipótese de se tratar de triângulos geodésicos, a soma dos ângulos deve ser igual a 200 grados mais o excesso esférico).

Designando por v_1, v_2 e v_3 as correcções a aplicar aos ângulos observados para se obterem os valores mais prováveis, e por $e = (A + B + C) - 200$, o êrro de fêcho do triângulo, a equação de condição será:

$$v_1 + v_2 + v_3 + e = 0 ,$$

a qual poderia resolver-se pelo método geral, mas, lògicamente, se conclui que, se os ângulos forem medidos com igual precisão, as correcções são tôdas iguais $a - e/3$.

O êrro médio dos ângulos compensados será:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{c}} = \sqrt{\frac{3\,e^2}{9}} = \pm \frac{e}{\sqrt{3}} ,$$

valor que se poderia obter directamente pelo princípio da propagação dos erros, expresso por $e^2 = 3\,\varepsilon^2$.

O êrro de uma direcção compensada será $\varepsilon/\sqrt{2}$.

Se os ângulos forem observados com diferente precisão, também, evidentemente, se conclui que as correcções são inversamente proporcionais aos pesos das observações.

Para definir as condições de precisão dêste método, basta estudar os erros que vêm para os lados por virtude dos erros nos ângulos.

Assim, se fôr a a base conhecida, o lado b será:

$$b = a \,.\, \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} ,$$

e, representando por $\pm\,\varepsilon$ os erros médios dos ângulos, a influência dêles na precisão do comprimento do lado é dada pela expressão do êrro médio respectivo:

$$\varepsilon_b = \sqrt{\left(a \,.\, \frac{\cos B}{\operatorname{sen} A}\right)^2 \varepsilon^2 + \left(a \,.\, \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}^2 A} \,.\, \cos A\right)^2 \varepsilon^2}$$

ou

$$\varepsilon_b = b \,.\, \varepsilon \sqrt{\cot^2 B + \cot^2 A} \,.$$

Para o lado c obter-se-ia igualmente:

$$\varepsilon_c = c \,.\, \varepsilon \sqrt{\cot^2 C + \cot^2 A} \,.$$

Destas duas expressões deduz-se que os valores mínimos dos erros nos lados se veri-

ficam quando os ângulos tiverem simultâneamente os seus valores máximos, isto é, quando $A = B = C$, donde se conclui que as melhores condições de precisão se obtêm com um triângulo eqüilátero. Na prática, deve procurar-se que o ângulo no vértice a determinar (oposto à base) esteja compreendido entre 30 e 170 grados.

De tôda esta análise, pode ainda concluir-se que, de um modo geral, as condições de precisão, na posição de um vértice, variam na razão inversa do comprimento dos lados e, portanto, é conveniente aumentar a precisão nas observações dos ângulos à medida que aqueles comprimentos crescem.

Assim, nas triangulações topográficas basta utilizar teodolitos da categoria do Wild T2 ou Zeiss II, operando com 2 ou 4 giros, ao passo que nas rêdes geodésicas torna-se necessário aumentar o número de giros e, nas ordens superiores, utilizar aparelhos mais precisos, v. g. o Wild T 3, e com variável número de giros, conforme a ordem dos triângulos, a-fim-de, tendo em atenção o comprimento dos lados, se obter uma rêde onde a precisão na posição dos vértices seja uniforme.

Também, quando se deseje definir a precisão por intermédio de valores limites para os erros de fêcho dos triângulos, estes devem ser fixados de acôrdo com a precisão desejada para a posição dos vértices, podendo variar de 50", para lados com um comprimento médio de 500 metros, até 10" e valores menores. A categoria do teodolito a utilizar pode escolher-se, neste caso, em face do êrro máximo permitido num ângulo, $\frac{e}{\sqrt{3}}$, em que e é o êrro máximo de fêcho dos triângulos, sendo necessário para isso conhecer, experimentalmente, a precisão do teodolito, definida v. g. pelo êrro médio de observação de um ângulo em dadas condições.

COMPENSAÇÃO DE TRIANGULAÇÕES

Acabámos de estudar as condições de precisão dos métodos simples de determinação de coordenadas de um vértice e vimos também como, no caso do triângulo isolado, se efectua a compensação das observações dos ângulos.

Ora, as triangulações são formadas pela conjugação daqueles métodos simples constituindo figuras com linhas superabundantes relativamente às estrictamente necessárias à determinação das coordenadas; por isso, e em virtude dos erros cometidos nas observações, sucede que os triângulos, de que se mediram os três ângulos, apresentam erros de fêcho e, além disso, os comprimentos obtidos para os lados não são rigorosamente os mesmos qualquer que seja o encadeamento adoptado para o seu cálculo.

É necessário, portanto, depois de se proceder à compensação de estação, fazer um *ajustamento* dos ângulos de modo a obter-se uma figura rígida no sentido geométrico da palavra, que conduza a uma única solução para as coordenadas dos vértices.

Êsse ajustamento, impròpriamente chamado *compensação,* consiste em aplicar determinadas correcções aos elementos observados ou aos que dêles se deduzam. As correcções são calculadas com base no princípio dos mínimos quadrados, de modo que a rêde ajustada ou compensada seja a mais provável.

Os métodos gerais de compensação dividem-se em analíticos e gráficos.

Os primeiros classificam-se de acôrdo com a natureza dos elementos da rêde cujas correcções são as incógnitas do problema. Assim, temos:

a) *Método das variações de coordenadas* (rectangulares ou geográficas), onde se tomam como incógnitas as correcções a aplicar aos valores provisórios das coordenadas dos vértices, obtidas por qualquer maneira adequada. O número de incógnitas é igual ao dôbro do número de vértices novos e o cálculo é conduzido de modo que a soma

dos quadrados dos resíduos das direcções seja mínima. Êste método tem particular aplicação na compensação de rêdes complementares apoiadas em vértices de coordenadas conhecidas, pertencentes a cadeias estabelecidas segundo os meridianos e paralelos, o que sucede nos países de grande extensão, como a França, onde o método tem sido muito usado.

b) *Método das direcções*, em que se tomam directamente como incógnitas as correcções a aplicar às direcções observadas, conduzindo-se o cálculo de modo que a soma dos quadrados daquelas correcções seja mínima.

c) *Método dos ângulos*, que constitui, de-facto, uma variante do método anterior, em que as incógnitas são as correcções a aplicar aos ângulos formados pelas direcções.

Vamos apresentar as noções fundamentais relativas ao método das direcções, aplicado na compensação da rêde geodésica portuguesa, e deduzir a partir dêle o método dos ângulos, de cómoda aplicação na compensação de figuras isoladas (quadriláteros e polígonos) e susceptível de simplificação de modo a ser utilizado no *ajustamento das triangulações topográficas*, problema que interessa especialmente ao engenheiro.

MÉTODO DAS DIRECÇÕES

Consiste, como vimos, em tomar como incógnitas as correcções a fazer às direcções e, pelo método dos mínimos quadrados, transformar a rêde na mais provável figura geométrica.

Os erros cometidos nas observações dão origem, como já se disse, não só a erros de fêcho dos triângulos, mas também a discordâncias entre os valores calculados para os lados por caminhos diferentes. Para que a rêde seja uma figura geométrica rígida, isto é, para fazer desaparecer aquelas *discordâncias angulares e lineares*, é necessário que as correcções às direcções satisfaçam a determinadas *equações de condição*, cujo número é igual ao de discordâncias independentes, que se podem pôr em evidência. Trata-se, portanto, de um problema de *observações condicionadas*.

Tipos de equações de condição e sua forma

Para fixar a posição de um vértice A (fig. 4), a partir da base conhecida $B\ C$, é suficiente efectuar observações nos vértices B e C, e, portanto, se forem feitas observações também em A aparece uma discordância angular resultante do êrro de fêcho do triângulo.

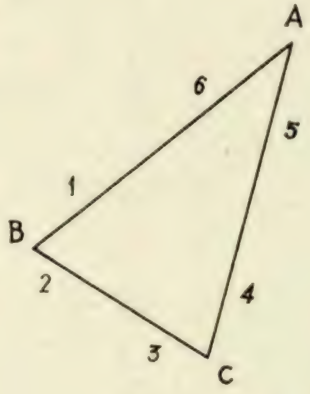


Fig. 4

Numerando as direcções e representando as correcções pelos números entre parêntesis, podemos escrever a seguinte equação de condição que faz desaparecer aquela discordância:

$$(2) - (1) + (4) - (3) + (6) - (5) + e = 0 \ .$$

Tôdas as equações dêste tipo, relativas aos triângulos ou polígonos independentes da figura, são chamadas *equações aos ângulos*.

Para definir agora a posição de um quarto vértice D (fig. 5), supondo que tôdas as direcções foram observadas nos dois sentidos, aparecem mais dois triângulos independentes que dão origem a duas novas equações aos ângulos, e ainda uma discordância linear resultante de o comprimento do lado $C\ D$ ter valores diferentes, $C\ D_1$ e $C\ D_2$, conforme o caminho seguido para o seu cálculo. Para eliminar esta discordância,

basta estabelecer uma equação de condição derivada da identidade:

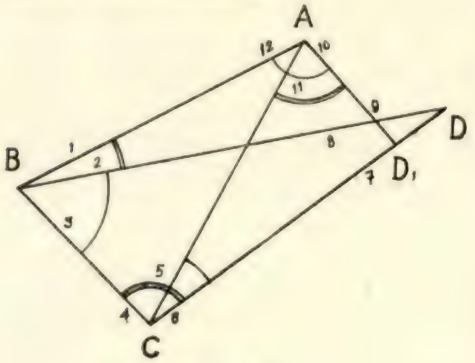


Fig 5

$$\frac{DC}{DB} \cdot \frac{DB}{DA} \cdot \frac{DA}{DC} = 1 ,$$

que exprime a condição de os três lados CD, BD e AD concorrerem no mesmo ponto D *(polo)*.

Daquela igualdade deduz-se: (¹)

$$\frac{\text{sen DBC}}{\text{sen DCB}} \cdot \frac{\text{sen DAB}}{\text{sen DBA}} \cdot \frac{\text{sen DCA}}{\text{sen DAC}} = 1$$

ou

$$\frac{\text{sen}\,[3 + (3) - 2 - (2)]}{\text{sen}\,[6 + (6) - 4 - (4)]} \cdot$$
$$\cdot \frac{\text{sen}\,[12 + (12) - 10 - (10)]}{\text{sen}\,[2 + (2) - 1 - (1)]} \cdot$$
$$\cdot \frac{\text{sen}\,[6 + (6) - 5 - (5)]}{\text{sen}\,[11 + (11) - 10 - (10)]} = 1 ,$$

que é a equação de condição procurada, chamada *equação aos lados,* fàcilmente redutível à forma linear. Com efeito, tomando os logaritmos e considerando que, pela série de Taylor, é

$$\log \text{sen}\,(x + h) = \log \text{sen}\, x + h \frac{d}{dx} (\log \text{sen}\, x) =$$
$$= \log \text{sen}\, x + h\, d ,$$

desprezando os infinitéssimos de ordem superior à primeira e representando por d a diferença tabular relativa a 1″, temos, finalmente:

$$d_{3,2}\,[(3) - (2)] + d_{12,10}\,[(12) - (10)] +$$
$$+ d_{6,5}\,[(6) - (5)] - d_{6,4}\,[(6) - (4)] -$$
$$d_{2,1}\,[(2) - (1)] - d_{11,10}\,[(11) - (10)] + \triangle = 0 ,$$

em que

$$\triangle = \log \text{sen}\,[3 - 2] + \log \text{sen}\,[12 - 10] +$$
$$+ \log \text{sen}\,[6 - 5] - \log \text{sen}\,[6 - 4] -$$
$$- \log \text{sen}\,[2 - 1] - \log \text{sen}\,[11 - 10] .$$

Examinando esta equação, vemos que ela fàcilmente se deduz considerando o ponto D para polo e supondo que êle se desloca para o interior do triângulo ABC (fig. 6). A *regra do polo* consiste em considerar alternadamente, com sinais contrários, os ângulos exteriores do polígono assim obtido, tendo em atenção a ordem por que foram observadas as direcções.

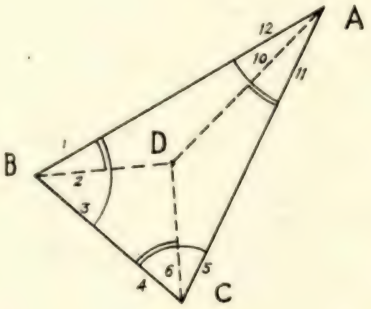


Fig. 6

As equações aos lados, além desta forma deduzida para o caso especial do quadrilátero, podem ainda apresentar mais três formas para os casos de um polígono com vértice central, da existência de dois ou mais lados adjacentes considerados conhecidos e fixos, e de bases medidas nos extremos de uma cadeia.

Assim, no primeiro caso (fig. 7), partindo de um lado qualquer AE e resolvendo os 4 triângulos deve encontrar-se o mesmo valor para êsse lado. Fàcilmente se deduziria a equação de condição, que directamente pode também obter-se tomando o ponto E para *polo* e seguindo a regra anterior:

(¹) Tratar-se-á apenas o caso dos triângulos planos, mas fàcilmente poderia introduzir-se nas deduções a consideração do excesso esférico para a hipótese dos triângulos geodésicos de ordem elevada.

$$d_{3,2}[(3)-(2)] + d_{6,5}[(6)-(5)] + d_{9,8}[(9)-(8)] + d_{12,11}[(12)-(11)] - d_{5,4}[(5)-(4)] - d_{8,7}[(8)-(7)] - d_{11,10}[(11)-(10)] - d_{2,1}[(2)-(1)] + \triangle = 0,$$

em que

$$\triangle = \log \operatorname{sen}[3-2] + \ldots - \log \operatorname{sen}[5-4] - \ldots$$

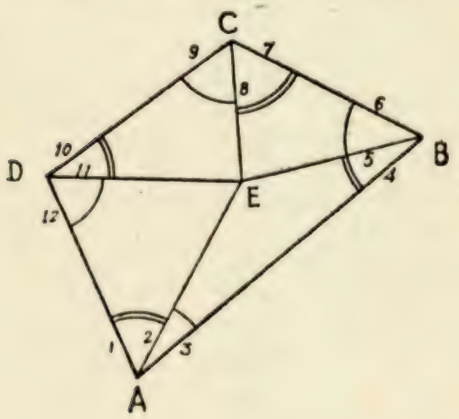


Fig. 7

O segundo caso apresenta-se quando a rêde é compensada por troços (caso português) e a ligação entre êles é feita por dois ou mais lados adjacentes. A equação aos lados tem, nesta hipótese, a designação especial de *equação de ligação.*

Também pode ser necessária a consideração de equações desta forma quando se deseja estabelecer uma triangulação topográfica ligada à rêde geodésica de 3.ª ordem por dois ou mais lados adjacentes.

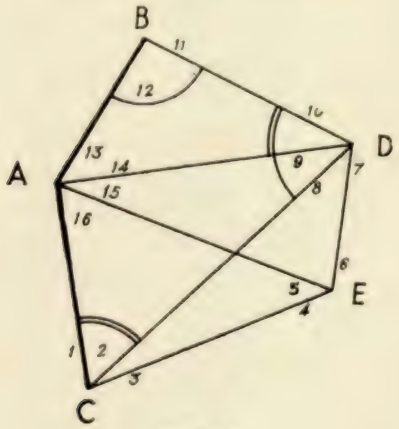


Fig. 8

Assim, se considerarmos (fig. 8) os lados AB e AC fixos, pertencendo a uma figura já compensada, a expressão da equação de ligação obtém-se pela resolução dos triângulos ABD e ACD, que, partindo de AC, deve dar AB.

Será então:

$$\frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{\operatorname{sen} ADC}{\operatorname{sen} ACD} \cdot \frac{\operatorname{sen} ABD}{\operatorname{sen} ADB}$$

ou

$$\frac{\operatorname{sen}[9+(9)-8-(8)] \cdot \operatorname{sen}[12-11-(11)]}{\operatorname{sen}[2+(2)-1] \cdot \operatorname{sen}[10+(10)-9-(9)]} \cdot \frac{AB}{AC} = 1$$

Tomando os logaritmos, vem, finalmente:

$$d_{9,8}[(9)-(8)] - d_{12,11}(11) - d_{2,1}(2) - d_{10,9}[(10)-(9)] + \triangle = 0,$$

em que

$$\triangle = \log AB + \log \operatorname{sen}[9-8] + \log \operatorname{sen}[12-11] - \log AC - \log \operatorname{sen}[2-1] - \log \operatorname{sen}[10-9].$$

O terceiro caso é o da existência de lados conhecidos, a partir de medições de bases, nos extremos de troços de uma cadeia, o que obriga a estabelecer uma equação aos lados, chamada *equação de concordância de bases,* definindo a condição de, a partir do lado AB, se chegar ao lado CD, resolvendo os triângulos da cadeia (fig. 9).

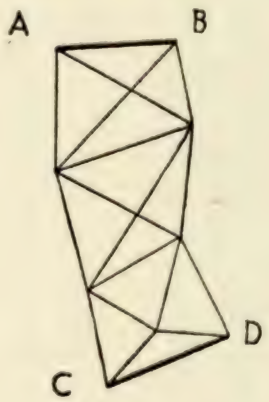


Fig. 9

Na revisão que se projecta fazer à rêde fundamental portuguesa, prevê-se, em prin-

cípio, a sua divisão em troços com medição de novas bases, o que implica o estabelecimento de equações desta forma.

Número de equações de condição

No estabelecimento das equações de condição independentes em figuras complexas pode acontecer que se omitam algumas necessárias e se escrevam outras supérfluas; convém, por isso, conhecer a priori o número de equações e adoptar regras que permitam também a sua ordenação.

Êsse número pode determinar-se pelas clássicas regras de Gauss, que não têm em consideração as equações de ligação e as de concordância de bases, ou por outras mais gerais que só não têm em conta a última espécie de equações.

Regras de Gauss

Seja l, o número total de linhas da figura, l', o número de linhas observadas nos dois sentidos, p, o número total de vértices, p', o número de vértices estacionados.

O número de *equações aos ângulos* é dado pela expressão:

$$l' - p' + 1 .$$

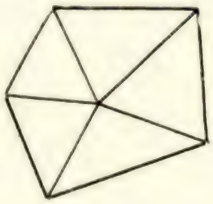
Com efeito, ligando p' vértices, dois a dois, por p' linhas, êles formarão um polígono fechado com uma equação de condição relativa à soma dos seus ângulos internos. Juntando uma diagonal qualquer, obter-se-ão duas equações de condição relativas aos dois polígonos parciais, isto é, cada linha, além das p', dá origem a uma nova equação. Donde $l' - p'$ linhas originam $l' - p'$ novas equações que, juntamente com a primeira, dão um total de $l' - p' + 1$ equações.

O número de *equações aos lados* é dado pela expressão:

$$l - 2p + 3 .$$

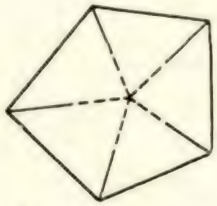
Com efeito, tomando dois vértices da figura, a determinação de um terceiro a partir dêles exige apenas duas linhas, podendo ser observadas num só sentido, e assim sucessivamente para os restantes vértices. Portanto, o número de linhas para determinar p vértices é igual à inicial (observada nos dois sentidos) mais $2(p-2)$, isto é, um total de $2(p-2)+1 = 2p-3$ linhas. Logo, cada linha além das $2p-3$ dá origem a uma equação de condição e o número total destas será então $l-(2p-3) = l-2p+3$.

Alguns exemplos simples, apresentados nas figuras 10 a a 10 e, permitem ilustrar a aplicação das regras.



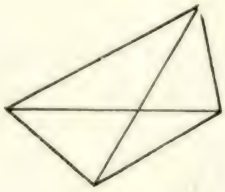
$l = l' = 10 \quad p = p' = 6$
$l' - p' + 1 = 5$
$l - 2p + 3 = 1$

Fig. 10 a



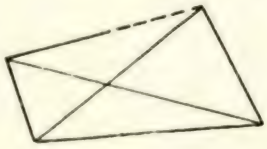
$l = 10 \quad l' = 5$
$p = 6 \quad p' = 5$
$l' - p' + 1 = 1$
$l - 2p + 3 = 1$

Fig. 10 b



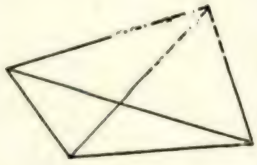
$l = l' = 6 \quad p = p' = 4$
$l' - p' + 1 = 3$
$l - 2p + 3 = 1$

Fig. 10 c



$l = 6 \quad l' = 5$
$p = p' = 4$
$l' - p' + 1 = 2$
$l - 2p + 3 = 1$

Fig. 10 d



$l = 6 \quad l' = 3$
$p = 4 \quad p' = 3$
$l' - p' + 1 = 1$
$l - 2p + 3 = 1$

Fig. 10 e

Regras gerais

Estas regras só não incluem a equação de concordância de bases:

Se fôr P o número de vértices novos de uma figura, a determinação de cada um dêles exige duas observações de ângulos e, portanto, designando por O o número total de ângulos observados (em cada estação, é igual ao número de direcções menos uma tomada para referência, contando-se o conjunto de direcções antigas como uma), o número de observações superabundantes, isto é, o total de equações de condição é igual a $O - 2P$.

Para elucidar a aplicação das regras gerais e das de Gauss, apresenta-se a seguir um exemplo (fig. 11), em que os lados AD e CD são conhecidos e fixos.

Pelas regras gerais, será $O = 13$, $P = 2$ e o número total de equações, incluindo a de ligação, é:

$$O - 2P = 9 .$$

Pelas regras de Gauss, temos:

$$l = 10 , \; l' = 9 , \; p = 5 , \; p' = 5 ,$$
$$l' - p' + 1 = 5 ,$$
$$l - 2p + 3 = 3 ,$$

não estando incluída nestas últimas a equação de ligação.

Para facilitar o estabelecimento ordenado das equações de condição, pode proceder-se do seguinte modo: Forma-se a figura a partir de um lado, e à medida que se vão introduzindo os novos vértices e unindo aos interiores, escrevem-se logo as equações, considerando que, por cada vértice, o número de equações aos ângulos é igual ao número de linhas (observadas nos dois sentidos) traçadas menos 1, e o número de equações aos lados, o número total de linhas (observadas ou não nos dois sentidos) menos 2.

Vértices	Ângulos	Lados
C	0	0
B	2	1
E	3	2
Total	5	3

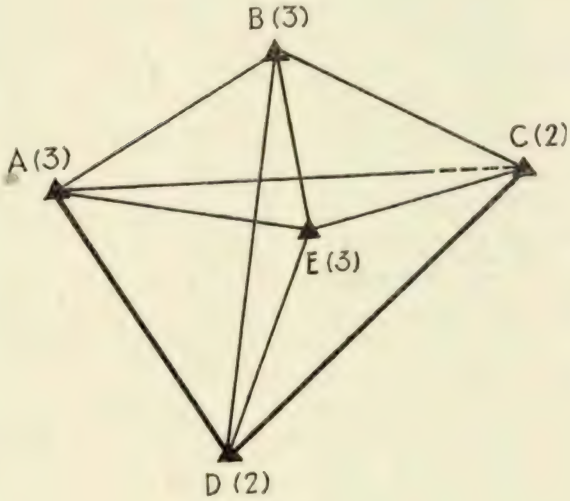


Fig. 11

MÉTODO DOS ÂNGULOS

Êste método constitui uma variante do anterior, considerando-se como incógnitas as correcções a aplicar aos ângulos formados pelas várias direcções. É cómodo o seu emprêgo, quando se trata da compensação de figuras isoladas, pois o número de incógnitas é menor que no método das direcções.

No que se refere ao estabelecimento das equações aos ângulos, além das relativas aos ângulos internos dos triângulos ou polígonos independentes, há ainda a considerar as equações correspondentes à soma dos ângulos de um giro completo de horizonte, ou de um giro incompleto de que está definido o valor angular por virtude de uma ligação a figuras já ajustadas.

A 1.ª ordem das triangulações topográficas pode, em geral, ser formada por figuras simples (quadriláteros e polígonos) quer isoladas, quer ligadas entre si de modo que sejam dispensadas equações de ligação. Assim, nas figuras 12 a e 12 b estão representados dois esquemas constituídos por

quadriláteros e polígonos com vértice central ligados por um único lado e ainda por polígonos abertos F (EIJG), no primeiro esquema, D (EABC) e G (JLMH), no segundo esquema.

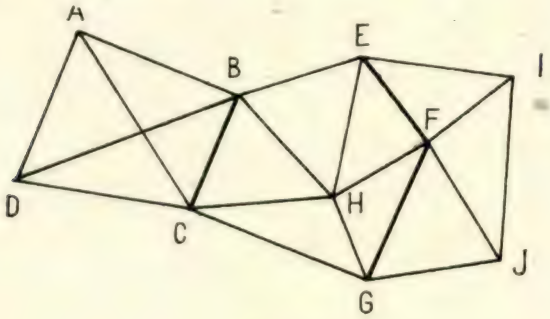


Fig. 12 a

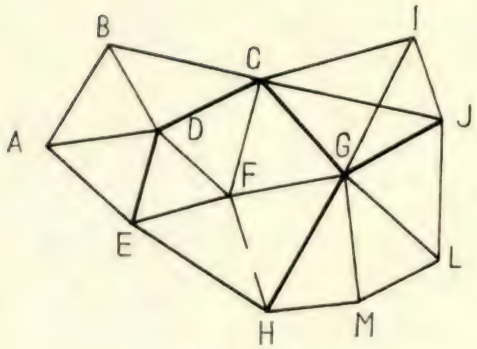


Fig. 12 b

Considerando a menor precisão angular exigida nas triangulações topográficas, em face do pequeno comprimento dos lados, compreende-se que se não torne necessária a aplicação de métodos rigorosos de compensação, e daí a possibilidade de adoptar métodos mais simples e expeditos, conforme vamos apresentar para aquelas três figuras — quadrilátero, polígono com vértice central e polígono aberto — as quais podem sempre conjugar-se de modo a constituírem o esquema de uma triangulação topográfica, qualquer que seja a forma da zona a cobrir.

Estes métodos consistem em decompor a compensação em duas fases: A primeira, em que se calcula uma série de correcções, resolvendo, pelos mínimos quadrados, sòmente o sistema de equações aos ângulos; a segunda, em que se considera um sistema de equações de condição constituído pela equação aos lados e por equações aos ângulos, tais que seja mantida a anterior compensação, sistema cuja resolução dá origem a uma nova série de correcções que, somadas às primeiras, dão as correcções totais. Estas últimas equações aos ângulos são estabelecidas, empìricamente, no sentido de se obterem expressões simples para as segundas correcções, existindo dois tipos de compensação, a *semi-rigorosa* e a *expedita,* segundo a forma daquelas equações.

Quadrilátero

Na determinação da primeira série de correcções, podem, para facilidade de cálculo, estabelecer-se as três equações aos ângulos (fig. 13) com a condição de a soma dos ângulos do quadrilátero ser igual a 400 grados e de as somas (1 + 2) e (3 + 4) serem, respectivamente, iguais a (5 + 6) e (7 + 8).

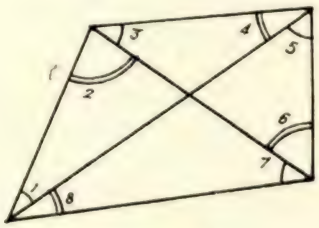


Fig. 13

Assim, designando por v as correcções, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = l_1 \\ v_1 + v_2 \qquad\qquad - v_5 - v_6 \qquad\qquad = l_2 \\ \qquad + v_3 + v_4 \qquad\qquad - v_7 - v_8 = l_3 , \end{cases}$$

em que

$$l_1 = 400 - \Sigma \text{ ângulos}, \quad l_2 = (5 + 6) - (1 + 2)$$

$$l_3 = (7 + 8) - (3 + 4) .$$

Resolvendo aquele sistema, pelos mínimos quadrados, obtêm-se as seguintes expressões simples para as correcções:

$$v_1 = v_2 = \frac{l_1}{8} + \frac{l_2}{4} \qquad v_5 = v_6 = \frac{l_1}{8} - \frac{l_2}{4}$$

$$v_3 = v_4 = \frac{l_1}{8} + \frac{l_3}{4} \qquad v_7 = v_8 = \frac{l_1}{8} - \frac{l_3}{4}$$

Para o cálculo da segunda série de correcções, é necessária a equação aos lados, que se pode escrever tomando para polo o cruzamento das diagonais do quadrilátero:

$$d_1 v'_1 - d_2 v'_2 + d_3 v'_3 - d_4 v'_4 + d_5 v'_5 - \\ - d_6 v'_6 + d_7 v'_7 - d_8 v'_8 = \triangle ,$$

em que

$$\triangle = + \log \text{sen } 2 + \log \text{sen } 4 + \ldots\ldots \\ - \log \text{sen } 1 - \log \text{sen } 3 - \ldots\ldots ,$$

valor calculado com os ângulos resultantes da aplicação das primeiras correcções.

O sistema de equações a resolver será constituído por aquela equação e por equações aos ângulos que podem apresentar a seguinte forma:

$$\begin{cases} v'_1 + v'_2 = 0 \\ v'_3 + v'_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_5 + v'_6 = 0 \\ v'_7 + v'_8 = 0 \end{cases} ,$$

e daí resultam, pelos mínimos quadrados, os seguintes valores para as segundas correcções:

$$\begin{cases} v'_1 = - v'_2 = K\,(d_1 + d_2) \\ v'_3 = - v'_4 = K\,(d_3 + d_4) \\ v'_5 = - v'_6 = K\,(d_5 + d_6) \\ v'_7 = - v'_8 = K\,(d_7 + d_8) \end{cases} ,$$

em que

$$K = \frac{\triangle}{2R} , \; R = \frac{1}{2} \Sigma\, d^2 + d_1 d_2 + d_3 d_4 + \\ + d_5 d_6 + d_7 d_8 .$$

O método exposto chama-se *semi-rigoroso,* mas ainda pode tornar-se mais simples, estabelecendo-se o seguinte sistema:

$$v'_1 = v'_3 = v'_5 = v'_7 = - v'_2 = - \\ - v'_4 = - v_6 = - v'_8 ,$$

que, juntamente com a equação aos lados, dá directamente os seguintes valores para as correcções:

$$v'_1 = \pm \frac{\triangle}{\Sigma d} ,$$

podendo designar-se êste método por *expedito.*

Polígono com vértice central

O sistema das equações aos ângulos (fig. 14), incluindo a relativa ao giro completo do horizonte, é o seguinte:

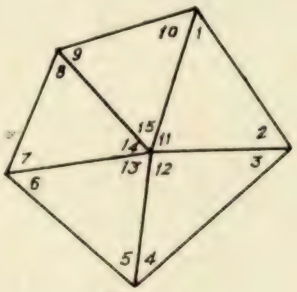


Fig. 14

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_{11} + e_{11} = 0 \\ v_3 + v_4 + v_{12} + e_{12} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} = 0 \end{cases} ,$$

em que e_{11}, e_{12} ..... são os erros de fêcho dos triângulos, representados pelo respectivo ângulo ao centro:

$$e_{11} = (1 + 2 + 11) - 200 .$$

Resolvendo pelos mínimos quadrados e indicando com os símbolos v_i e v_j, respectivamente, as correcções aos ângulos exteriores e aos ângulos ao centro, temos a 1.ª série de correcções:

$$\begin{cases} v_i = v_{i+1} = - \dfrac{e_j}{3} - \dfrac{\Sigma e}{6n} \\ i = 1, 3, 5, \ldots\ldots \\ v_j = - \dfrac{e_j}{3} + \dfrac{\Sigma e}{3n} \\ j = 2n + 1, 2n + 2, \ldots\ldots \end{cases}$$

em que n é o número de triângulos.

A equação aos lados terá a forma:

$$v'_1 d_1 - v'_2 d_2 + v'_3 d_3 - v'_4 d_4 + \ldots\ldots\ldots = \triangle ,$$

em que

$$\triangle = \log \text{sen } 2 + \log \text{sen } 4 + \ldots\ldots\ldots - \\ - \log \text{sen } 1 - \log \text{sen } 3 - \ldots\ldots\ldots$$

De modo análogo ao caso anterior, o sistema constituído por esta equação e mais cinco aos ângulos do tipo:

$$v'_i + v'_{i+1} = 0 ,$$

poderá ser resolvido, pelos mínimos quadrados, obtendo-se assim a segunda série de correcções da forma:

$$v'_i = - v'_{i+1} = K (d_i + d_{i+1}) ,$$

em que

$$K = \frac{\triangle}{2R} ,$$

$$R = \frac{1}{2} \Sigma d^2 + \Sigma d_i d_{i+1} ,$$

modo de proceder que constitui o método *semi-rigoroso.*

O *método expedito* adopta o seguinte sistema de equações aos ângulos:

$$v'_1 = v'_3 = v'_5 = \ldots = - v'_2 = - v'_4 = \ldots ,$$

que, resolvido com a equação aos lados, dá directamente:

$$v'_i = - v'_{i+1} = \pm \frac{\triangle}{\Sigma d} .$$

Polígono aberto

As equações aos ângulos (fig. 15), incluindo

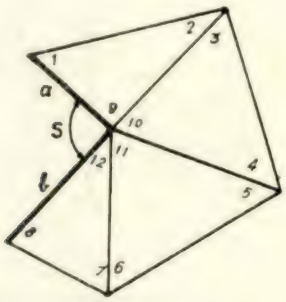


Fig. 15

a relativa ao giro incompleto do horizonte, são as seguintes:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_9 + e_9 = 0 \\ v_3 + v_4 + v_{10} + e_{10} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12} + E = 0 \end{cases} ,$$

em que e_9, e_{10} ..... são os erros de fêcho dos triângulos e E, o êrro de fêcho do giro:

$$E = (S + 9 + 10 + 11 + 12) - 400 .$$

A primeira série de correcções terá a forma:

$$\begin{cases} v_i = v_{i+1} = \dfrac{e_j}{3} - \dfrac{\Sigma e}{6n} + \dfrac{E}{2n} \\ v_j = - \dfrac{e_j}{3} + \dfrac{\Sigma e}{3n} - \dfrac{E}{n} \end{cases}$$

A equação aos lados deverá, neste caso, ter em consideração os valores conhecidos dos lados *a* e *b* e, portanto, o valor de $\triangle$ será:

$$\triangle = \log b - \log a + \log \operatorname{sen} 2 + \log \operatorname{sen} 4 + \ldots\ldots - \log \operatorname{sen} 1 - \log \operatorname{sen} 3 \ldots\ldots .$$

As expressões das segundas correcções, em qualquer dos métodos, são análogas às do caso anterior.

Comparação dos métodos

A-fim-de se poder efectuar um estudo comparativo dos métodos de ajustamento, desde o rigoroso ao expedito, vamos apresentar os resultados dos cálculos relativos à triangulação topográfica de uma vila, destinada a servir de base à determinação dos pontos de apoio do seu levantamento fotogramétrico na escala de 1 : 1.000.

A rêde de 1.ª ordem dessa triangulação (fig. 16), que é objecto dêste estudo, foi estabelecida de modo que os lados tivessem comprimentos compreendidos entre 500 e 1.000 m e as observações dos ângulos foram feitas com um teodolito Wild T2, obtendo-se para os triângulos erros de fêcho tão pequenos que, atendendo aos valores daqueles comprimentos, poderiam dispen-

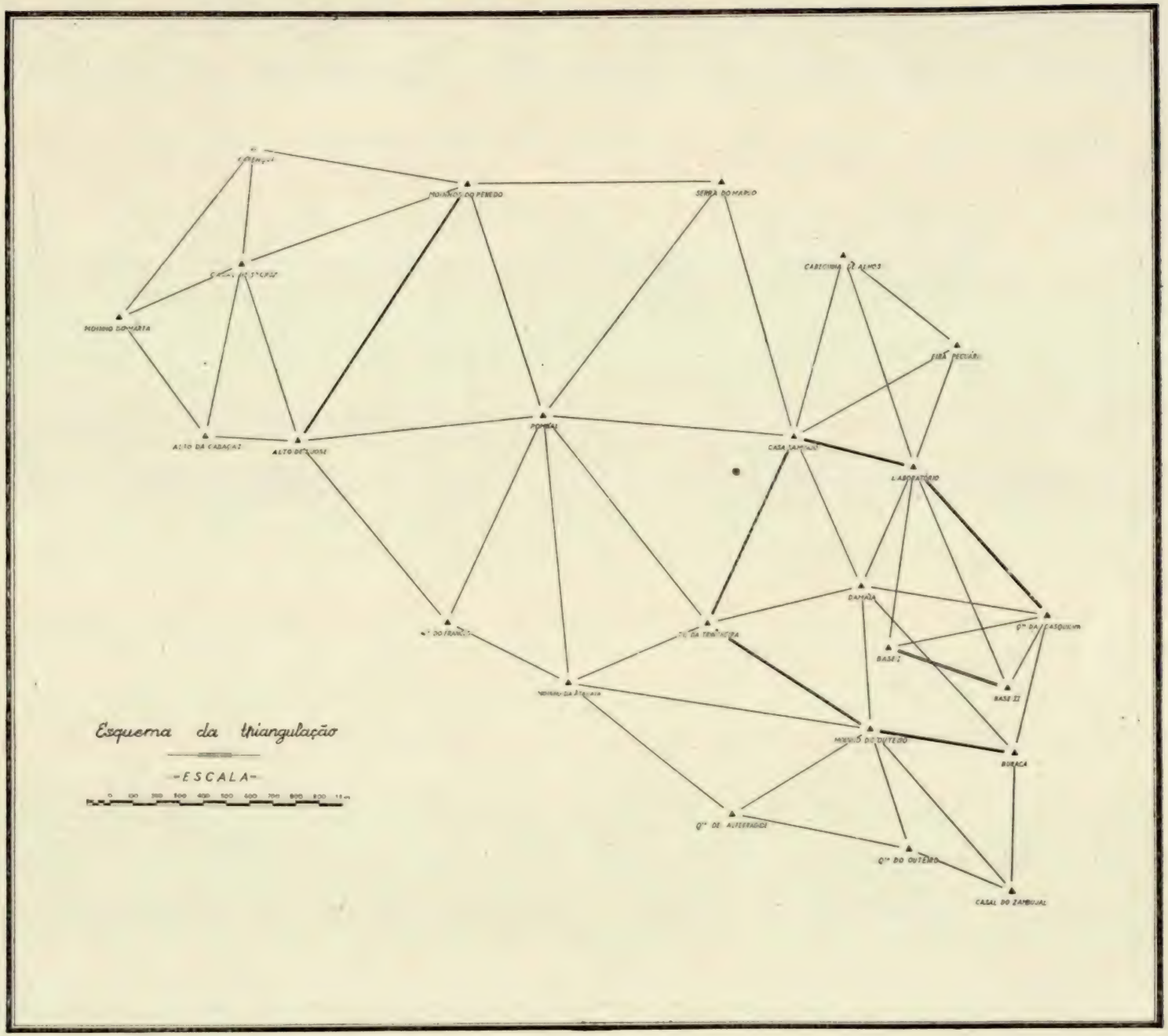

MOINHO DO PENEDO
SERRA DO MARIO
CABEÇINHA DE ALMOS
FIRÃ PECUÁRIA
MOINHO DO MARTA
ALTO DA CABAÇAZ
ALTO DE JOSÉ
CASA DA MUNIZ
LABORATÓRIO
DAMÃA
BASE I
BASE II
MOINHO DO OUTEIRO
BORACA
CASAL DO ZAMBUJAL
Esquema da triangulação
-ESCALA-

Fig. 16

sar-se os cálculos de compensação, os quais, no entanto, se efectuaram com o intuito de se conseguir uma rêde homogénea.

A rêde é constituída por 3 polígonos com vértice central, 3 quadriláteros incluindo o da ligação da base, tudo disposto de modo que são dispensadas equações de ligação, e ainda por um polígono aberto com o vértice em Moinho do Outeiro e com um lado comum a um dos outros polígonos, ligação que não foi considerada nas compensações.

Para efeitos do estudo, efectuou-se a compensação de um dos quadriláteros e de um dos polígonos com vértice central pelos três métodos, rigoroso, semi-rigoroso e expedito, e em anexo apresentam-se os cálculos relativos aos dois últimos, que nos interessam especialmente. Junta-se ainda a compensação de um polígono aberto pelo método semi-rigoroso, a-fim de completar os esquemas da marcha [1] dos cálculos, que mais úteis podem ser ao engenheiro.

Nos quadros da página seguinte indicam-se os valores das correcções obtidas.

Antes de analisar estes resultados, convém explicar que os valores das correcções são apresentados ao décimo de segundo, não por isso ser necessário, pois, conforme já se disse, os pequenos comprimentos dos lados nem exigiriam compensação, mas apenas com o fim de permitir o estudo comparativo.

A comparação dos resultados mostra que as correcções obtidas pelos métodos semi-rigoroso e expedito diferem pouco das encontradas pelo método rigoroso, e para se concluir da influência dessas diferenças em possíveis deslocamentos da posição planimétrica dos vértices, valores que nos interessam directamente, é necessário fazer intervir a sensibilidade dos lados. Neste caso concreto, dados os pequenos valores dos lados e as fracas diferenças entre as correcções, conclui-se imediatamente que a posição planimétrica dos vértices não é influenciada pelo método usado na compensação.

Considerando, agora, o caso de uma triangulação topográfica, com lados de comprimento variando de 1 a 2 km, observada em condições normais de precisão com erros de fêcho máximo iguais a cêrca de 30 segundos centesimais, e admitindo diferenças entre as correcções, dadas pelos métodos semi-rigoroso e rigoroso, de 10 segundos, elas correspondem a deslocamentos planimétricos máximos do vértice de 1,6 a 3,2 cm. Se os comprimentos dos lados forem menores, de 0,5 a 1 km, atingindo, por isso, os erros de fêcho valores maiores, até 50 segundos ou mesmo mais, e se admitirmos diferenças entre as correcções, dadas pelos métodos rigoroso e expedito, de 20 segundos, elas originam deslocamentos planimétricos de 1,6 a 3,2 cm.

Estas considerações e outras análogas, que podem ser feitas para triangulações com lados maiores e conseqüentes menores erros de fêcho, mostram-nos que a influência do método de compensação na posição planimétrica dos vértices é tão pequena que permite a aplicação de métodos mais simples, o semi-rigoroso ou o expedito, conforme o comprimento dos lados e a precisão fixada, podendo até mesmo dispensar-se a compensação.

Finalmente, desejamos observar que, como é evidente, as diferenças entre os valores das correcções são tanto maiores, quanto pior conformada é a figura, isto é, quanto mais os triângulos se afastam da forma eqüilátera. Isto porque, ao calcularem-se as segundas correcções, se estabelecem a priori certas condições para os seus valores (iguais dois a dois, em valor absoluto, no método semi-rigoroso e todos iguais, em valor absoluto, no método expedito) independentemente da grandeza dos ângulos. Com efeito, analisando as diferenças entre as correcções, no quadro II, nota-se que elas são maiores no primeiro e último triângulo, que mais se afastam da forma eqüilátera; e a comparação entre os valores do quadro II e os do quadro I mostra-nos ainda que estes são maiores porque o quadrilátero é pior conformado que o polígono.

---

[1] Na marcha dos cálculos da compensação está prevista uma verificação das segundas correcções, que constitui apenas uma condição necessária da exactidão dos seus respectivos valores, visto que a determinação dos *log sen* dos ângulos não é abrangida por essa verificação.

QUADRO I

Quadrilátero

Ângulos	CORRECÇÕES				
	Rigoroso	Semi-rigoroso	Dif.	Expedito	Dif.
1 — 33.6715	− 1,4	− 1,9	+ 0,5	− 1,9	+ 0,5
2 — 53.9930	+ 1,0	+ 0,9	+ 0,1	+ 0,9	+ 0,1
3 — 56.6513	+ 0,4	+ 0,1	+ 0,3	− 0,4	+ 0,8
4 — 55.6841	+ 1,0	+ 1,9	− 0,9	+ 2,4	− 1,4
5 — 66.8181	− 0,3	− 0,3	0	+ 0,1	− 0,4
6 — 20.8460	+ 3,9	+ 3,3	+ 0,6	+ 2,9	+ 1,0
7 — 34.2553	− 1,3	− 1,0	− 0,3	− 1,4	+ 0,1
8 — 78.0803	+ 0,7	+ 1,0	− 0,3	+ 1,4	− 0,7

QUADRO II

Polígono com vértice central

Ângulos	CORRECÇÕES				
	Rigoroso	Semi-rigoroso	Dif.	Expedito	Dif.
1 — 64.6601	+ 1,3	+ 1,2	+ 0,1	+ 1,6	− 0,3
2 — 103.2981	+ 0,4	+ 0,2	+ 0,2	− 0,2	+ 0,6
15 — 32.0415	+ 1,3	+ 1,6	− 0,3	+ 1,6	− 0,3
3 — 70.6233	− 2,8	− 2,7	− 0,1	− 2,7	− 0,1
4 — 62.7923	− 4,6	− 4,5	− 0,1	− 4,5	− 0,1
16 — 66.5854	− 2,6	− 2,8	+ 0,2	− 2,8	+ 0,2
5 — 56.6356	+ 4,6	+ 4,7	− 0,1	+ 4,3	+ 0,3
6 — 56.9142	+ 2,1	+ 2,1	0	+ 2,5	− 0,4
17 — 86.4491	+ 4,3	+ 4,2	+ 0,1	+ 4,2	+ 0,1
7 — 81.1885	− 6,2	− 6,1	− 0,1	− 6,1	− 0,1
8 — 57.5671	− 8,0	− 7,9	− 0,1	− 7,9	− 0,1
18 — 61.2464	− 5,8	− 6,0	+ 0,2	− 6,0	+ 0,2
9 — 59.0029	+ 0,7	+ 0,6	+ 0,1	+ 0,6	+ 0,1
10 — 77.5931	− 1,1	− 1,2	+ 0,1	− 1,2	+ 0,1
19 — 63.4040	+ 0,4	+ 0,6	− 0,2	+ 0,6	− 0,2
11 — 77.6338	+ 5,4	+ 5,4	0	+ 5,6	− 0,2
12 — 70.0990	+ 3,9	+ 4,0	− 0,1	+ 3,8	+ 0,1
20 — 52.2657	+ 5,7	+ 5,6	+ 0,1	+ 5,6	+ 0,1
13 — 81.6149	− 3,8	− 3,9	+ 0,1	− 3,5	− 0,3
14 — 80.3784	− 4,8	− 4,9	+ 0,1	− 5,3	+ 0,5
21 — 38.0079	− 3,4	− 3,2	− 0,2	− 3,2	− 0,2

Em resumo, ao engenheiro compete, portanto, escolher o método a adoptar nas compensações, de acôrdo com a forma da figura e dimensões dos lados, mas pode sempre afirmar-se que, em triangulações topográficas, não é necessária a aplicação de métodos rigorosos, os quais são, algumas vezes, empregados mais como uma obrigação do que pròpriamente com o fim de melhorar as observações.

MÉTODO GRÁFICO DO PONTO APROXIMADO

Terminada a compensação das figuras de 1.ª ordem da triangulação topográfica, procede-se ao cálculo das coordenadas ([1]), e em seguida apresenta-se o problema da determinação da posição planimétrica dos restantes vértices da rêde.

Cada um dêles está apoiado em vértices já conhecidos, por intermédio de triângulos e intersecções, quanto possível independentes, que podem ser resolvidas por métodos analíticos, obtendo-se diferentes pares de valores para as coordenadas, de que se acham as médias, que se tomam para valores mais prováveis.

Esta maneira de proceder é bastante adoptada, pois facilita a organização de normas simples de cálculo, acessíveis a qualquer calculador, mas, no entanto, tem o inconveniente de não permitir uma análise perfeita dos erros de observação e obriga ainda à reünião das direcções para constituirem, em certas condições mais favoráveis, as formas simples de cálculo de coordenadas.

Dêste modo é necessário, para formar os triângulos, observar entre si os vértices da base; além disso, o agrupamento das direcções para constituirem as formas simples não permite a utilização, num mesmo cálculo, de direcções observadas num só sentido com outras observadas nos dois sentidos, impedindo, muitas vezes, o melhor aproveitamento de tôdas elas.

Ora, o método gráfico de cálculo e compensação de coordenadas, conhecido por *método do ponto aproximado,* que procede simultâneamente com tôdas as direcções, observadas num ou nos dois sentidos, sem qualquer restrição, tem a vantagem de permitir uma mais fácil organização da rêde de ordem inferior, visto que não há a impor normas de reünião de direcções, nem é necessário que os vértices de 1.ª ordem se observem sempre entre si. Há assim uma maior liberdade na escolha das direcções a observar, menos vértices a estacionar, e consegue-se também, mais fàcilmente, para todos os vértices, uma precisão uniforme na sua posição planimétrica, princípio que deve ser sempre tido em atenção.

Esta análise incidiu sôbre triangulações topográficas consideradas isoladas, em relação à rêde geodésica, e possuindo figuras de 1.ª ordem ajustadas por métodos simples. Acrescenta-se ainda que êste método pode aplicar-se à determinação de coordenadas de vértices de 3.ª ordem de uma rêde geodésica e, também, se a densidade daqueles vértices é suficiente, pode permitir a obtenção, a partir dêles, da rêde de 1.ª ordem de uma triangulação topográfica. É assim que se procede, modernamente, em França, para o estabelecimento da triangulação cadastral apoiada na rêde geodésica de 3.ª ordem.

O *método do ponto aproximado* consiste em, primeiramente, determinar por métodos rápidos, analítica ou gràficamente, as coordenadas aproximadas do vértice considerado; e, em seguida, traçar num gráfico em grande escala (fig. 17), relativamente à posição aproximada P_0 tomada para origem de coordenadas, os *lugares geométricos de P*, correspondentes às direcções de intersecção partindo de vértices conhecidos (A, B e C) e aos ângulos observados em P (estes últimos são os segmentos capazes dos ângulos, assimiláveis a visadas de intersecção fictícia AB e BC). Os lugares geométricos não se encontram num único ponto, em virtude dos

([1]) As coordenadas do vértice Moinho da Atalaia, pertencente às duas figuras cuja ligação não foi considerada nas compensações, foram calculadas por dois caminhos distintos, encontrando-se valores diferindo no máximo de 2 cm, o que mostra ter sido a organização do ajustamento das figuras feita em condições de se obter uma rêde homogénea.

erros das observações, e por isso é necessário determinar a posição mais provável do

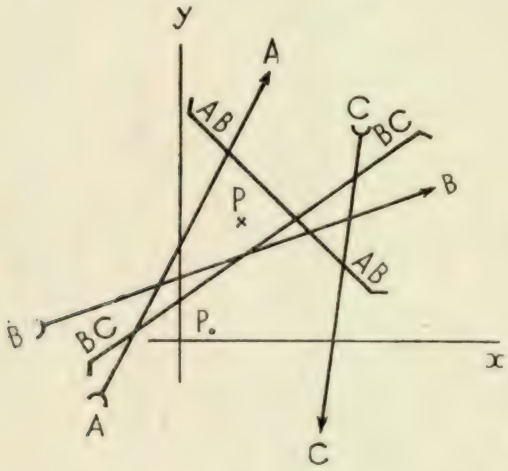


Fig. 17

ponto P, no interior do polígono convexo que contém tôdas as intersecções dêles tomados dois a dois.

Determinação das coordenadas aproximadas

Pode ser feita por métodos analíticos, utilizando duas direcções de intersecção directa ou três de intersecção inversa.

Mais ràpidamente e com rigor suficiente, podem obter-se essas coordenadas, num gráfico em escala de 1 : 5.000 a 1 : 25.000 conforme os comprimentos dos lados, traçando as direcções com um bom transferidor a partir dos vértices conhecidos e medindo os valores das coordenadas da intersecção.

Traçado dos lugares geométricos de intersecção directa

Em cada vértice conhecido existe um giro de direcções observadas para os vértices a determinar e para alguns antigos, estes últimos permitindo o cálculo do Az_o da estação, a partir do qual se transformam as direcções observadas, em *azimutes observados* para os vértices novos pela expressão conhecida:

$$Az = Az_o + D \quad .$$

As coordenadas aproximadas do vértice permitem a determinação, pelas fórmulas conhecidas, de *azimutes calculados* que, comparados aos anteriores, revelam, cada um, uma diferença angular a que corresponde, tendo em conta a sensibilidade do lado, um desvio linear da direcção observada relativamente à direcção passando pelo ponto aproximado:

$$d = D \,.\, \text{sen}\, 1'' \,(Az_{obs} - Az_{calc}) \quad .$$

Num gráfico (fig. 18) em grande escala (1 : 50 a 1 : 10 conforme a precisão a atingir), com dois eixos rectangulares de origem em P_o, marca-se a direcção passando pelo ponto aproximado, por intermédio do seu azimute; o lugar geométrico procurado é

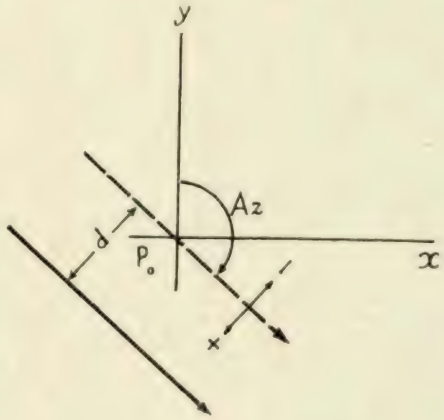


Fig. 18

representado por uma paralela a essa direcção, traçada a uma distância d para um ou outro lado, conforme o sentido da contagem dos azimutes e o sinal da diferença $(Az_{obs} - Az_{calc})$.

Traçado dos lugares geométricos de intersecção inversa

Em cada vértice a determinar, podemos estabelecer, a partir das coordenadas aproximadas, um giro de azimutes calculados, que definem *ângulos calculados* entre direcções tomadas duas a duas, os quais, comparados aos *ângulos observados*, revelam, cada um, uma certa diferença angular que, tendo em conta a sensibilidade do segmento capaz do ângulo, corresponde a um desvio

linear da visada de intersecção fictícia relativamente ao ponto aproximado:

$$d = \frac{PA \cdot PB}{AB} \cdot \text{sen } 1'' (P_{obs} - P_{calc}) \quad .$$

Para traçar no gráfico (fig. 19) essa visada de intersecção, é necessário calcular o azimute da tangente PT ao segmento:

$$Az_T = Az\,PB + \hat{A} = Az\,PB + Az\,AP - Az\,AB \; .$$

Marcando a direcção dessa tangente passando por P_o, o lugar geométrico obtém-se traçando um segmento de recta paralelo a essa direcção, a uma distância d, para o lado da base AB se $P_{obs} > P_{calc}$ e para o lado contrário se $P_{obs} < P_{calc}$.

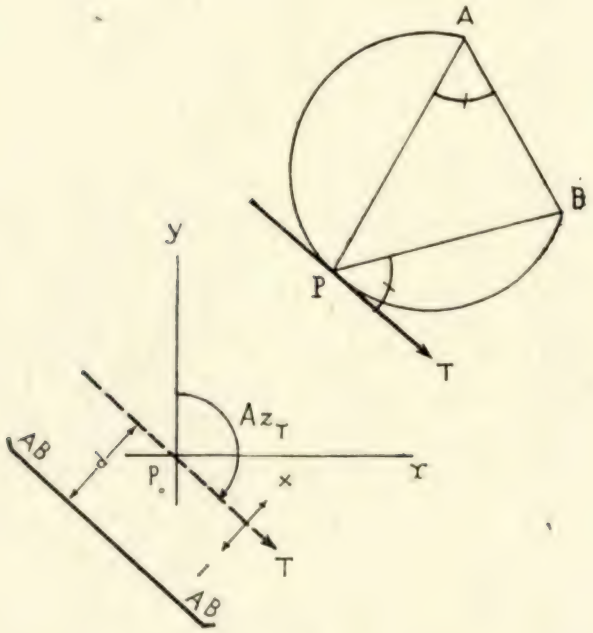


Fig. 19

Se fôr n o número de direcções observadas, haverá $\frac{n(n-1)}{2}$ segmentos capazes, mas só $(n-1)$ são independentes. Assim, no caso de 3 direcções, existem os segmentos (1.2), (1.3) e (2.3), mas só dois dêles são independentes, devendo o terceiro passar pela intersecção dos dois primeiros, desde que não exista qualquer êrro de cálculo. Na prática, quando n é pequeno, podem traçar-se todos os segmentos, o que representa uma verificação do cálculo. Na hipótese de n ser grande, devem escolher-se os segmentos independentes com menor sensibilidade e que dêem boas intersecções.

Determinação da posição mais provável

Traçados [1] todos os lugares geométricos (fig. 20), em que alguns dêles podem passar por P_o na hipótese de o cálculo das suas coordenadas ser feito analìticamente, resta determinar a posição mais provável do vértice relativamente ao ponto aproximado e medir as correcções $\triangle x$ e $\triangle y$ a aplicar às coordenadas aproximadas para se obterem as definitivas.

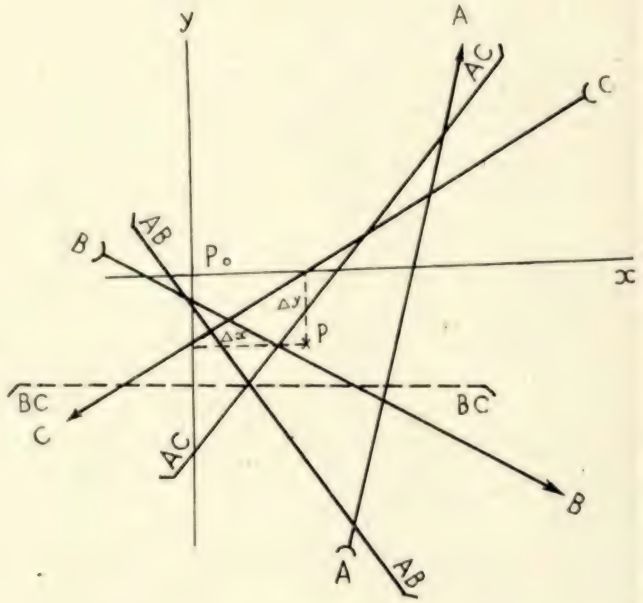


Fig. 20

Essa determinação poderia rigorosamente ser feita, pelos mínimos quadrados, tornando mínima a expressão Σpd^2, em que d representa as distâncias da posição mais

[1] Quando, para verificação, se tracem segmentos que não sejam independentes, devem distinguir-se dos outros, representando-os a tracejado, a-fim-de não darem a aparência duma maior precisão, que é ilusória e pode falsear a escolha da posição mais provável.

provável aos lugares geométricos e p, os pesos dêsses lugares, que são função das sensibilidades e dos erros de observação das direcções.

Considerando a dificuldade em fixar valores exactos para os pesos e também a pouca vantagem em aplicar métodos baseados nos mínimos quadrados, quando o número de medições independentes é pequeno e se não conhecem bem os seus pesos, recorre-se sempre, na prática, a soluções mais simples e expeditas, consistindo, geralmente, em escolher «a sentimento» a posição mais provável no interior do polígono convexo, tendo mentalmente em atenção as sensibilidades dos lugares geométricos, as condições de observação dos ângulos, etc.

Para facilitar a escolha, podem traçar-se para cada lugar geométrico faixas de dispersão de largura proporcional à sua sensibilidade, as quais, reduzindo as dimensões do polígono de êrro, permitem uma mais rápida e correcta determinação da posição mais provável.

Quando algum dos lugares geométricos se afastar sensìvelmente do ponto médio dos outros, êle deve ser abandonado, depois de se verificar que não existe qualquer êrro de cálculo.

PRECISÃO DAS TRIANGULAÇÕES

Para se verificar se uma triangulação satisfaz ao fim em vista é necessário estudar as suas condições de precisão, ou melhor, como o problema se apresenta ao engenheiro, são os fins utilitários da triangulação que devem impor as normas do seu estabelecimento, observação e cálculo.

No entanto, o modo de analisar os resultados de uma triangulação permite definir as condições que devem, por outro lado, presidir ao seu estabelecimento.

Ao engenheiro interessa o conhecimento concreto da precisão da posição planimétrica dos vértices, pois uma triangulação tem sempre para êle um fim utilitário, que exige uma precisão uniforme e definida para todos os vértices, condição que, aliás, é, modernamente, considerada em qualquer rêde.

Ora, sucede que não é fácil definir rigorosamente a precisão planimétrica dos vértices de uma triangulação, conseguindo-se apenas obter outros índices de precisão que indirectamente nos permitem, contudo, tirar certas conclusões suficientes para o engenheiro, a quem bastam neste caso noções da ordem de grandeza.

Assim, tratemos, em primeiro lugar, o caso de uma triangulação compensada.

Na hipótese de a compensação ser feita pelo método das direcções, temos para valor do *êrro médio de uma direcção:*

$$\sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{c}},$$

em que λ representa as correcções e c, o número de equações de condição.

O êrro médio de um ângulo obtém-se multiplicando aquele valor por $\sqrt{2}$.

Se a compensação é feita pelo método dos ângulos, o *êrro médio de um ângulo é:*

$$\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{c}}.$$

Para se fazer uma análise de erros, independentemente dos resultados da compensação, pode definir-se o *êrro médio triangular:*

$$\sqrt{\frac{\Sigma e^2}{n}},$$

em que e representa os erros de fêcho dos triângulos e n o seu número.

O *êrro médio de um ângulo* será naquelas condições:

$$\sqrt{\frac{\Sigma e^2}{3n}},$$

expressão que dá valores menores que os encontrados pela fórmula derivada dos resultados da compensação, visto que naquela não se tomam em consideração as condições relativas às equações aos lados.

Os erros médios dos ângulos permitem então deduzir os erros médios dos lados, aplicando os princípios da propagação dos erros; obtêm-se, assim, fórmulas dando o

êrro do lado de uma triangulação, em função dos valores das cotangentes dos ângulos da rêde que, a partir de um lado conhecido de êrro desprezável, conduzem à determinação do lado em questão. Êsses erros médios dos lados podem dar uma idéia sôbre os erros de posição, mas bastam-nos, contudo, noções mais simples, embora não tão correctas sob o ponto de vista da teoria da propagação dos erros.

Utilizaremos para isso a expressão simples conhecida:

$$D \,.\, \varepsilon'' \,.\, \text{sen } 1'',$$

que nos dá o valor do deslocamento linear de um vértice, situado a uma distância D, medido normalmente à direcção, sendo ε'' a variação do seu azimute.

Para aplicar aquela fórmula, temos, evidentemente, de nos contentar com o conhecimento do êrro médio de posição de um vértice relativamente aos vértices vizinhos que o determinaram, tomando para D o valor médio do comprimento dos lados e para ε o êrro médio da direcção. É claro que poderemos, pelos princípios da propagação dos erros, transmitir êsses erros de posição a vértices mais afastados.

O problema inverso da fixação das condições em que deve ser observada uma triangulação, também pode ser estudado com base nestas noções simples que, a partir do êrro de posição, permitiriam deduzir o êrro médio de observação de um ângulo.

Quando, nas ordens inferiores, os valores mais prováveis das coordenadas de um vértice se obtêm achando a média dos resultados da determinação por triângulos e intersecções, quanto possível independentes, pode calcular-se um êrro médio que dê uma idéia da precisão em posição.

Na hipótese da aplicação do método do ponto aproximado, podemos tomar, para índice de precisão, a média das distâncias da posição mais provável aos lugares geométricos, que se designa por *raio médio de indecisão.*

CONCLUSÕES

Nada de novo se escreveu para os técnicos na matéria. De resto, esta questão das compensações já vem desde há muito a ser estudada, e tão completamente que nada de novo sôbre ela é possível dizer.

Foi nosso intuito, apenas, apresentar concretamente êste importante problema, e mostrar que êle é susceptível de soluções simples, mais lógicas, talvez, em muitos casos, se examinarmos bem as condições de aplicação do método rigoroso dos mínimos quadrados.

De facto esquece-se, muitas vezes, que o princípio dos mínimos quadrados se baseia na existência de muitas observações, sem êrros sistemáticos e efectuadas em condições perfeitamente conhecidas a priori; e, sem ter isso em atenção, admite-se aquele princípio, em qualquer caso, com a idéia de que os métodos nêle baseados vão melhorar os resultados. Puro engano, podendo até suceder o contrário.

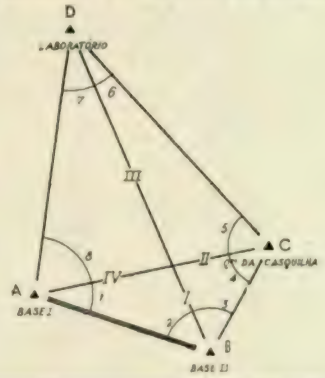
Se assim é, porque não adoptar, em certos casos, métodos simples destinados apenas a um ajustamento dos resultados com o fim de se obter um conjunto homogéneo? Parece-nos que a resposta está contida nas linhas dêste trabalho e, por isso, julgámos que interessaria expô-lo ao geral conhecimento.

COMPENSAÇÃO DE UM QUADRILÁTERO

(MÉTODO SEMI-RIGOROSO)

Cálculo dos erros de fêcho dos triângulos

ESQUEMA DO QUADRILÁTERO



Triângulo I	Triângulo II	Triângulo III	Triângulo IV
$A_1 = 33.6715$	$B_3 = 56.6513$	$C_5 = 66.8181$	$D_7 = 34.2553$
$B_2 = 53.9930$	$C_4 = 55.6841$	$D_6 = 20.8460$	$A_8 = 78.0803$
$B_3 = 56.6513$	$C_5 = 66.8181$	$D_7 = 34.2553$	$A_1 = 33.6715$
$C_4 = 55.6841$	$D_6 = 20.8460$	$A_8 = 78.0803$	$B_2 = 53.9930$
199.9999	199.9995	199.9997	200.0001
$e_1 = -1$	$e_2 = -5$	$e_3 = -3$	$e_4 = +1$

Cálculo dos ângulos compensados

Ângulos observados	1.as correc. v	Ângulos 1.a comp.	Log sen ângulos 1.a comp.	Dif. tab. 1 seg. d	2.as correc. v'	Ângulos comp.	Verif. 2.as correc.	Correc. totais
1 = 33.6715	− 0,5	6714,5	$\bar{1}.702941,0$	1,17	−1,4	6713,1	−1,64	−1,9
3 = 56.6513	+ 1,0	6514,0	$\bar{1}.890417,8$	0,56	−0,9	6513,1	−0,50	+0,1
5 = 66.8181	+ 1,5	8182,5	$\bar{1}.938126,2$	0,39	−1,8	8180,7	−0,70	−0,3
7 = 34.2553	0	2553,0	$\bar{1}.709684,4$	1,14	−1,0	2552,0	−1,14	−1,0
			$\bar{1}.241169,4$				−3,98	
2 = 53.9930	− 0,5	9929,5	$\bar{1}.875083,0$	0,61	+1,4	9930,9	+0,85	+0,9
4 = 55.6841	+ 1,0	6842,0	$\bar{1}.884988,9$	0,57	+0,9	6842,9	+0,51	+1,9
6 = 20.8460	+ 1,5	8461,5	$\bar{1}.507356,6$	2,01	+1,8	8463,3	+3,62	+3,3
8 = 78.0803	0	0803,0	$\bar{1}.973731,7$	0,24	+1,0	0804,0	+0,24	+1,0
Σ ang = 399.9996			$\bar{1}.241160,2$				+5,22	
			$\triangle = -9,2$				$\triangle = -9,20$	

CÁLCULO DAS 1.as CORRECÇÕES

$l_1 = 400 - \Sigma \text{ ang.} = +4$

$l_2 = (5+6) - (1+2) = -4$

$l_3 = (7+8) - (3+4) = +2$

$v_1 = v_2 = \frac{l_1}{8} + \frac{l_2}{4} = -0,5$

$v_3 = v_4 = \frac{l_1}{8} + \frac{l_3}{4} = +1,0$

$v_5 = v_6 = \frac{l_1}{8} - \frac{l_2}{4} = +1,5$

$v_7 = v_8 = \frac{l_1}{8} - \frac{l_3}{4} = 0$

CÁLCULO DAS 2.as CORRECÇÕES

Método expedito

$v'_1 = v'_3 = v'_3 = v'_7 = -v'_2 = -v'_4 = -v'_6 = -v'_8 = -\frac{\triangle}{\Sigma d}$

Método semi-rigoroso

$R = \frac{\Sigma d^2}{2} + d_1 d_2 + d_3 d_4 + d_5 d_6 + d_7 d_8$

$K = \frac{\triangle}{2R} = 0,76$

$v'_1 = -v'_2 = K(d_1 + d_2) = -1,35$

$v'_3 = -v'_4 = K(d_3 + d_4) = -0,86$

$v'_5 = -v'_6 = K(d_5 + d_6) = -1,82$

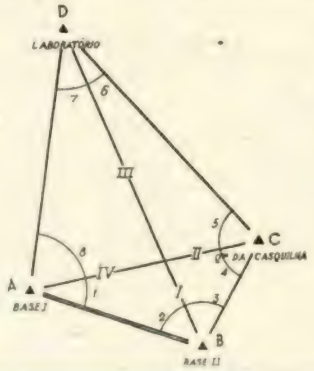
$v'_7 = -v'_8 = K(d_7 + d_8) = -1,05$

COMPENSAÇÃO DE UM QUADRILÁTERO

(MÉTODO EXPEDITO)

Cálculo dos erros de fêcho dos triângulos

ESQUEMA DO QUADRILÁTERO



Triângulo I	Triângulo II	Triângulo III	Triângulo IV
$A_1 = 33.6715$	$B_3 = 56.6513$	$C_5 = 66.8181$	$D_7 = 34.2553$
$B_2 = 53.9930$	$C_4 = 55.6841$	$D_6 = 20.8460$	$A_8 = 78.0803$
$B_3 = 56.6513$	$C_5 = 66.8181$	$D_7 = 34.2553$	$A_1 = 33.6715$
$C_4 = 55.6841$	$D_6 = 20.8460$	$A_8 = 78.0803$	$B_2 = 53.9930$
199.9999	199.9995	199.9997	200.0001
$e_1 = -1$	$e_2 = -5$	$e_3 = -3$	$e_4 = +1$

Cálculo dos ângulos compensados

Ângulos observados	1.as correc. v	Ângulos 1.a comp.	Log sen ângulos 1.a comp.	Dif. tab. 1 seg. d	2.as correc. v'	Ângulos comp.	Verif. 2.as correc.	Correc. totais
1 = 33.6715	− 0,5	6714,5	$\bar{1}.702941,0$	1,17	− 1,4	6713,1	− 1,61	− 1,9
3 = 56.6513	+ 1,0	6514,0	$\bar{1}.890417,8$	0,56	− 1,4	6512,6	− 0,77	− 0,4
5 = 66.8181	+ 1,5	8182,5	$\bar{1}.938126,2$	0,39	− 1,4	8181,1	− 0,54	+ 0,1
7 = 34.2553	0	2553,0	$\bar{1}.709684,4$	1,14	− 1,4	2551,6	− 1,57	− 1,4
			$\bar{1}.241169,4$				− 4,49	
2 = 58.9930	− 0,5	9929,5	$\bar{1},875083,0$	0,61	+ 1,4	9930,9	+ 0,84	+ 0,9
4 = 55.6841	+ 1,0	6842,0	$\bar{1}.884988,9$	0,57	+ 1,4	6843,4	+ 0,79	+ 2,4
6 = 20.8460	+ 1,5	8461,5	$\bar{1}.507356,6$	2,01	+ 1,4	8462,9	+ 2,77	+ 2,9
8 = 78.0803	0	0803,0	$\bar{1}.973731,7$	0,24	+ 1,4	0804,4	+ 0,33	+ 1,4
Σang = 399.9996			$\bar{1}.241160,2$	6,69			+ 4,73	
			$\triangle = -9,2$				$\triangle = -9,22$	

CÁLCULO DAS 1.as CORRECÇÕES

$l_1 = 400 - \Sigma\,\text{ang.} = +4$

$l_2 = (5+6) - (1+2) = -4$

$l_3 = (7+8) - (3+4) = +2$

$v_1 = v_2 = \frac{l_1}{8} + \frac{l_2}{4} = -0,5$

$v_3 = v_4 = \frac{l_1}{8} + \frac{l_3}{4} = +1,0$

$v_5 = v_6 = \frac{l_1}{8} - \frac{l_2}{4} = +1,5$

$v_7 = v_8 = \frac{l_1}{8} - \frac{l_3}{4} = 0$

CÁLCULO DAS 2.as CORRECÇÕES

Método expedito

$v'_1 = v'_3 = v'_5 = v'_7 = -v'_2 = -v'_4 = -v'_6 = -v'_8 = \frac{\triangle}{\Sigma d} = -1,38$

Método semi-rigoroso

$R = \frac{\Sigma d^2}{2} + d_1d_2 + d_3d_4 + d_5d_6 + d_7d_8$

$K = \frac{\triangle}{2R} = \ldots\ldots$

$v'_1 = -v'_2 = K(d_1 + d_2) = \ldots\ldots$

$v'_3 = -v'_4 = K(d_3 + d_4) = \ldots\ldots$

$v'_5 = -v'_6 = K(d_5 + d_6) = \ldots\ldots$

$v'_7 = -v'_8 = K(d_7 + d_8) = \ldots\ldots$

COMPENSAÇÃO DE UM POLÍGONO COM VÉRTICE CENTRAL

(MÉTODO SEMI-RIGOROSO)

Ângulos observados	Erros de fêcho e	1.ª correc. v	Ângulos 1.ª comp.	Log sen ang. ext. 1.ª comp.	Dif. tab. 1 seg. d	2.ª correc. v'	Ângulos comp.	Verif. 2.ª correc.	Correc. totais
1 = 64.6601		+ 0,7	6601,7	$\bar{1}$.929336,7	0,42	+ 0,5	6602,2	+ 0,21	+ 1,2
2 = 103.2981		+ 0,7	2981,7	$\bar{1}$.999417,0	0	— 0,5	2981,2	0	+ 0,2
15 = 32.0415	— 3	+ 1,6	0416.6				0416,6		+ 1,6
3 = 70.6233		— 3,6	6229,4	$\bar{1}$.952020,0	0,34	+ 0,9	6230,3	+ 0,31	—2,7
4 = 62.7923		— 3,6	7919,4	$\bar{1}$.921770,7	0,45	— 0,9	7918,5	— 0,40	—4,5
16 = 66.5854	+ 10	— 2,8	5851,2				5851,2		—2,8
5 = 56.6356		+ 3,4	6359,4	$\bar{1}$,890332,7	0,55	+ 1,3	6360,7	+ 0,72	+ 4,7
6 = 56.9142		+ 3,4	9145,4	$\bar{1}$.891866,5	0,54	— 1,3	9144,1	— 0,70	+ 2,1
17 = 86.4491	— 11	+ 4,2	4495,2				4495,2		+ 4,2
7 = 81.1885		— 7,0	1878,0	$\bar{1}$.980755,6	0,20	+ 0,9	1878,9	+ 0,18	—6,1
8 = 57.5671		— 7,0	5664,0	$\bar{1}$.895401,6	0,54	— 0,9	5663,1	— 0,31	—7,9
18 = 61.2464	+ 20	— 6,0	2458,0				2458,0		—6,0
9 = 59.0029		— 0,3	0028,7	$\bar{1}$.902933,6	0,51	+ 0,9	0029,6	+ 0,46	+ 0,6
10 = 77.5931		— 0,3	5930,7	$\bar{1}$.972521,7	0,25	— 0,9	5929,8	— 0,22	—1,2
19 = 63.4040	0	+ 0,6	4040,6				4040,6		+ 0,6
11 = 77.6338		+ 4,7	6342,7	$\bar{1}$.972628,7	0,25	+ 0,7	6343,4	+ 0,18	+ 5,4
12 = 70.0990		+ 4,7	0994,7	$\bar{1}$.950226,1	0,35	— 0,7	0994,0	— 0,24	+ 4,0
20 = 52.2657	— 15	+ 5,6	2662,6				2662,6		+ 5,6
13 = 81.6149		— 4,4	6144,6	$\bar{1}$.981630,9	0,20	+ 0,5	6145,1	+ 0,10	—3,9
14 = 80.3784		— 4,4	3779,6	$\bar{1}$.979035,9	0,20	— 0,5	3779,1	— 0,10	—4,9
21 = 38.0079	+ 12	— 3,2	0075,8				0075,8		—3,2

$$\Sigma e = -13$$

$$v_i = v_{i+1} = -\frac{e_j}{3} - \frac{\Sigma e}{6n}$$

$$i = 1, 3, 5, \ldots\ldots$$

$$v_j = -\frac{e_j'}{3} + \frac{\Sigma e}{3n}$$

$$j = 2n + 1, 2n + 2, \ldots\ldots$$

$\bar{1}$.609638,2 $\triangle = \Sigma \log \operatorname{sen}(i+1) - \Sigma \log \operatorname{sen} i$ + 2,16

$\bar{1}$.609642,5 — 1,97

$\triangle = +4,3$ $\triangle = +4,13$

Método expedito

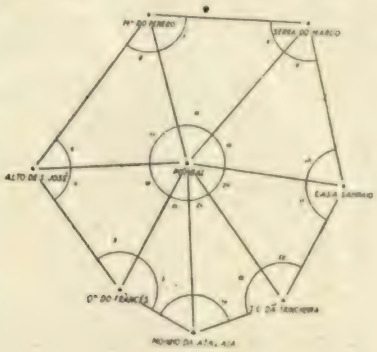
$$v'_i = -v'_{i+1} = \frac{\triangle}{\Sigma d}$$

Método semi-rigoroso

$$R = \frac{1}{2}\Sigma d^2 + \Sigma d_i d_{i+1}$$

$$K = \frac{\triangle}{2R} = \frac{+4,3}{3,63} = -1,18$$

$$v'_i = -v'_{i+1} = K(d_i + d_{i+1})$$



COMPENSAÇÃO DE UM POLÍGONO COM VÉRTICE CENTRAL

(MÉTODO EXPEDITO)

Ângulos observados	Erros de fêcho e	1.as correc. v	Ângulos 1.a comp.	Log sen ang. ext. 1.a comp.	Dif. tab. 1 seg. d	2.as correc. v'	Ângulos comp.	Verif. 2.as correc.	Correc. totais
1 = 64.6601		+ 0,7	6601,7	$\bar{1}$.929336,7	0,42	+ 0,9	6602,6	+0,38	+1,6
2 = 103.2981		+ 0,7	2981,7	$\bar{1}$.999417,0	0	− 0,9	2980,8	0	−0,2
15 = 32.0415	− 3	+ 1,6	0416,6				0416,6		+1,6
3 = 70.6233		− 3,6	6229,4	$\bar{1}$.952020,0	0,34	+ 0,9	6230,3	+0,31	−2,7
4 = 62.7923		− 3,6	7919,4	$\bar{1}$.921170,7	0,45	− 0,9	7918,5	−0,40	−4,5
16 = 66.5854	+ 10	− 2 8	5851,2				5851,2		−2 8
5 = 56.6356		+ 3,4	6359,4	$\bar{1}$.890332,7	0,55	+ 0,9	6360,3	+0,50	+4,3
6 = 56.9142		+ 3,4	9145,4	$\bar{1}$.891866,5	0,54	− 0,9	9144,5	−0,49	+2,5
17 = 86.4491	− 11	+ 4,2	4495,2				4495,2		+4,2
7 = 81.1885		− 7,0	1878,0	$\bar{1}$.890755,6	0,20	+ 0 9	1878,9	+0,18	−6,1
8 = 57.5671		− 7,0	5664,0	$\bar{1}$.895401,6	0,54	− 0,9	5663,1	−0,49	−7,9
18 = 61.2164	+ 20	− 6,0	2458,0				2458,0		−6,0
9 = 59.0029		− 0,3	0028,7	$\bar{1}$.902933,6	0,51	+ 0,9	0029,6	+0,46	+0,6
10 = 77.5931		− 0,3	5930,7	$\bar{1}$.972524,7	0,25	− 0,9	5929,8	−0,22	−1,2
19 = 63.4040	0	+ 0,6	4040,6				4040,6		+0,6
11 = 77.6338		+ 4,7	6342,7	$\bar{1}$.972628,7	0,25	+ 0,9	6343,6	+0,22	+5,6
12 = 70.0990		+ 4,7	0994 7	$\bar{1}$.950226,1	0,35	− 0,9	0993,8	−0,32	+3,8
20 = 52.2657	− 15	+ 5,6	2662,6				2662,6		+5,6
13 = 81.6149		− 4,4	6144,6	$\bar{1}$.981630,9	0,20	+ 0,9	6145,5	+0,18	−3,5
14 = 80.3784		− 4,4	3779,6	$\bar{1}$.979035,9	0,20	− 0,9	3778,7	−0,18	−5,3
21 = 38.0079	+ 12	− 3,2	0075,8				0075,8		−3,2

$\Sigma e = -13$

$$v'_i = v_{i+1} = -\frac{e_i}{3} - \frac{\Sigma e}{6n}$$

$i = 1, 3, 5, \ldots\ldots$

$$v_j = -\frac{e_j}{3} + \frac{\Sigma e}{3n}$$

$j = 2n + 1, 2n + 2, \ldots\ldots$

$\bar{1}.609638,2$

$\bar{1}.609642,5$

$\Delta = +4,3$

Método expedito

$$v'_i = -v'_{i+1} = \frac{\Delta}{\Sigma d}$$

$\Delta = \Sigma \log \operatorname{sen}(i+1) - \Sigma \log \operatorname{sen} i$

Método semi-rigoroso

$$R = \frac{1}{2} \Sigma d^2 + \Sigma d_i d_{i+1}$$

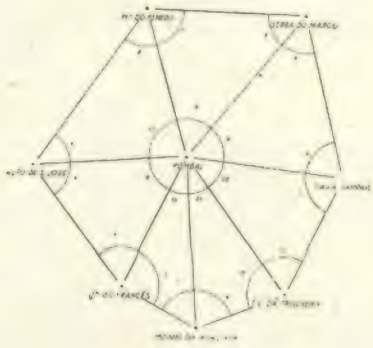
$$K = \frac{\Delta}{2R} = \text{——} = \text{.....}$$

$$v'_i = -v'_{i+1} = K(d_i + d_{i+1})$$

+2 23

−2.10

$\Delta = +4,33$



COMPENSAÇÃO DE UM POLÍGONO ABERTO

(MÉTODO SEMI-RIGOROSO)

Ângulos observados	Erros de fêcho e	1.as correc. v	Ângulos 1.a comp.	log sen ang. ext. 1.a comp.	Dif. tab. 1 seg. d	2.as correc. v'	Ângulos comp.	Verif. 2.as correc.	Correc. totais
				log a = 2,796225,6					
1=108.3888		+ 6,8	3894,8	$\bar{1}$.996217,5	—0,10	+ 0,9	3895,7	—0,09	+7,7
2= 46.9932		+ 6,8	9938,8	$\bar{1}$.827977,1	0,75	— 0,9	9937,9	—0,68	+5,9
11= 44.6163	— 17	+ 3,4	6166,4				6166,4		+3,4
3= 29.0016		— 2,2	0013,8	$\bar{1}$.643412,2	1,39	+ 1,1	0014,9	+ 1,53	—1,1
4=145.8294		— 2,2	8291,8	$\bar{1}$.876149,9	—0,60	— 1,1	8290,7	+0,66	—3,3
12= 25.1700	+ 10	— 5,6	1694,4				1694,4		—5,6
5= 67.3935		— 2,6	3932,4	$\bar{1}$.940354,6	0,39	+ 1,5	3933,9	+0,58	—1,1
6= 47.6128		— 2,6	6125,4	$\bar{1}$.832571,5	0,73	— 1,5	6123,9	—1,10	—4,1
13= 84.9948	+ 11	— 5,8	9942,2				9942,2		—5,8
7=122.5167		+ 4,1	5171,1	$\bar{1}$.972248,2	—0,25	+ 1,3	5172,4	—0,32	+5,4
8= 32.3014		+ 4,1	3018,1	$\bar{1}$.686549,3	1,23	— 1,3	3016,8	—1,60	+2,8
14= 45.1810	— 9	+ 0,8	1810,8				1810,8		+ 0,8
9= 34.0731		— 0,6	0730,4	$\bar{1}$.807595,0	1,15	+ 0,9	0731,3	+1,04	+ 0,3
10=138.8300		— 0,6	8299,4	$\bar{1}$,913646,3	—0,47	— 0,9	8298,5	+0,42	—1,5
15= 27.0974	+ 5	— 3,8	0970,2	log b = 2,919164,0			0970,2		—3,8

S = 172.9416 $\Sigma e = 0$

E = + 11

$$v_i = v_{i+1} = -\frac{e_j}{3} - \frac{\Sigma e}{6n} + \frac{E}{2n}$$

$$i = 1, 3, 5, \ldots\ldots$$

$$v_j = -\frac{e_j}{3} + \frac{\Sigma e}{3n} - \frac{E}{n}$$

$$j = 2n+1, 2n+2, \ldots\ldots$$

$\bar{1}$.259827,5

$\bar{1}$.259832,5

$\triangle = +5,0$

$$\triangle = \log b - \log a + \Sigma \log \operatorname{sen}(i+1) - \Sigma \log \operatorname{sen} i$$

+ 2,74

—2,30

$\triangle = +5,04$

Método semi-rigoroso

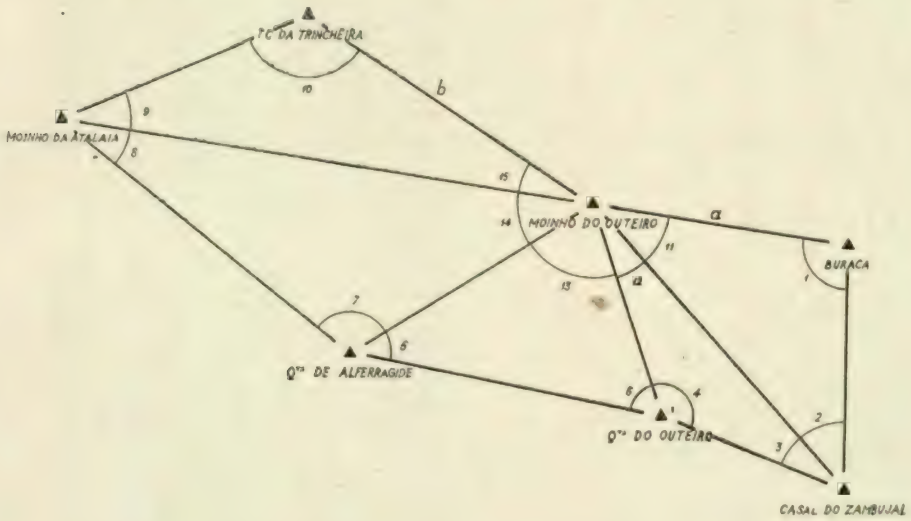
$$R = \frac{1}{2}\Sigma d^2 + \Sigma d_i\, d_{i+1}$$

$$K = \frac{\triangle}{2R} = \frac{+5,0}{3,72} = +1,34$$

$$v'_i = -v'_{i+1} = K\,(d_i + d_{i+1})$$

Método expedito

$$v'_i = -v'_{i+1} = \frac{\triangle}{\Sigma d}$$



Diversos sistemas de telefonia aplicada nas rêdes de distribuïção eléctrica

PELO ENG.º E. MICHEZ

Engenheiro Chefe da Rêde das Companhias Reunidas Gás e Electricidade de Lisboa

Introdução

A rapidez dos meios de comunicação deve ser assegurada entre os nós importantes duma rêde de distribuïção de energia.
Êste problema é actualmente indiscutível.

Demonstraremos como êle foi resolvido na rêde das Companhias Reünidas Gás e Electricidade de Lisboa, onde as modalidades de exploração conduziram sucessivamente à aplicação de diversos sistemas de telefonia moderna.

As CRGE alimentam em energia eléctrica a cidade de Lisboa e os seus arredores. A central Tejo encontra-se em Lisboa, à margem do Tejo.

A alimentação em 30 KV estende-se até 100 km ao norte da cidade e em 10 KV a 80 km para oeste, a par do oceano.

Desde numerosos anos já as comunicações telefónicas estavam asseguradas entre os escritórios da exploração, a Central e os principais postos de seccionamento, por um antigo sistema consistindo em aparelhos telefónicos manuais ligados por cabos de sinalização colocados paralelamente aos cabos principais da rêde primária.

Em 1934 as exigências da exploração tornaram necessária a criação duma nova central moderna.

Por etapes, as instalações da rêde urbana e os postos principais da rêde extra-muros foram ligados.

Construção

Cabos subterrâneos

A rêde de cabos foi completamente verificada e dada em estado de satisfazer as exigências impostas pela telefonia automática.

Estas são:

1.º — O isolamento quilométrico não pode ser inferior a 200.000 ohms.

2.º — A resistência ohmica entre um pôsto telefónico e a central não pode ultrapassar 2×250 ohms.

Primeira etape

A Central automática foi instalada numa dependência dum dos principais postos de seccionamento denominado Boa Vista.

Esta central é constituída por 2 secções, tendo cada uma a capacidade para 50 assinantes.

A rêde de cabos sai à roda desta central; nenhum dos assinantes está a uma distância ultrapassando a 8 km da central telefónica.

Esta etape termina a modernização da rêde urbana.

Segunda etape

Entre as rêdes extra-muros, a da Costa do Sol compreende 7 postos de corte importantes. Esta rêde vai até à secção balneária do Estoril.

Uma grande parte dos cabos existentes entre estes postos de corte compõem-se sòmente dum par de fios. Êste cabo está em bastante mau estado de isolamento e encontra-se colocado na proximidade de cabos de alta tensão de 10 KV.

A grande distância de comunicação (Estoril está a 22 km da central telefónica) de um e doutro lado e o pequeno número de condutores de que se dispõe, não permitem

a ligação dos diferentes postos à central automática, como assinantes directos.

Da mesma maneira a proximidade dos cabos telefónicos dos de alta tensão faz recear o perigo da inducção.

Afim de assegurar o serviço telefónico era necêssário recorrer ao sistema de chamadas selectivas. Êste permite a interconecção de várias estações numa única linha bi-filar, a ligação com a central automática, assim como a chamada geral das estações ligadas.

Como as impulsões são feitas por escolha inductiva, é possível proteger cada telefone por uma bobine toroidal contra as influências da alta tensão.

Cada um dos aparelhos está munido dum botão branco com a ajuda do qual se pode, em caso de urgência, entrar na conversação em curso entre 2 postos. Por meio dêste mesmo botão, uma conversa em curso pode ser interrompida.

Os transmissores são intercalados nas linhas de alimentação do sistema de chamadas selectivas. Desta maneira a comunicação pode ser estabelecida entre postos ligados a êste sistema e os assinantes da central telefónica.

Enfim, existe a possibilidade para um telefone qualquer de chamar ao mesmo tempo os outros correspondentes pela chamada de um número especial.

Terceira etape

Fêz-se sentir a necessidade de instalar em seguida um segundo sistema de ligação por escolhas múltiplas. Certos postos de seccionamento na região rural, com população pouco densa, só são ligados por linhas aéreas de alta tensão.

Sôbre os mesmos suportes das linhas 10 KV e instalado um par de fios galvanizados (fig. 1). Estes são colocados a 1 metro de distância para baixo dos fios de AT; os isoladores suportes são do tipo 10 KV.

Nas extremidades da linha os fios telefónicos são protegidos contra todo o contacto eventual com a AT por um sistema de protecção composto de resistências, pára-raios e transformador colocado na extremidade do cabo telefónico (fig. 1).

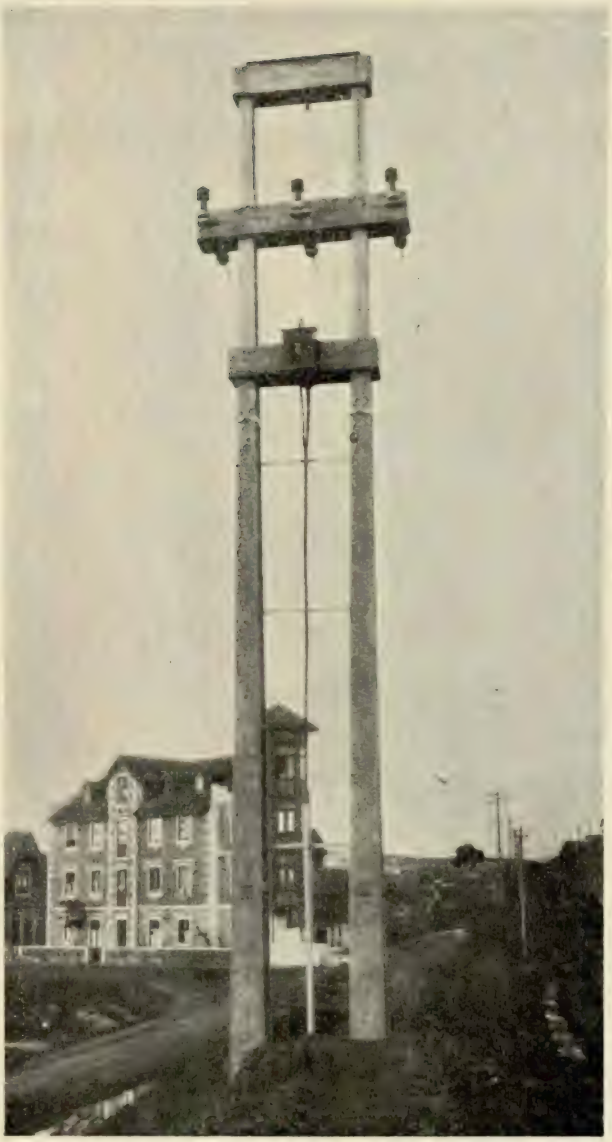


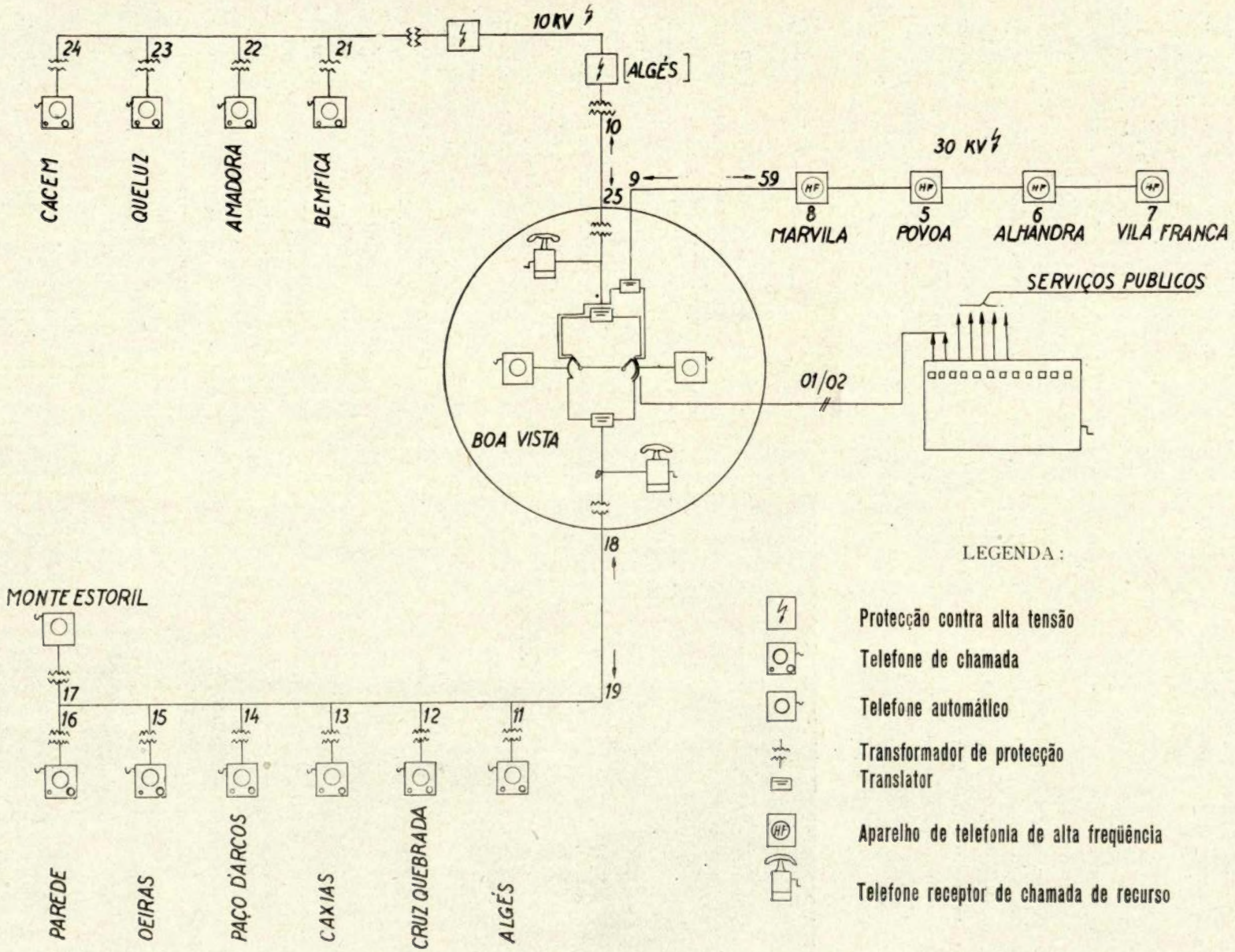
Fig. 1

Esta linha galvanizada vai de Algés até Benfica donde em seguida parte uma outra linha, apoiando-se desta vez, sôbre suportes da rêde de distribuïção de baixa tensão.

Todos os aparelhos desta região são protegidos por um translator anular de circuito magnético fechado.

Quarta etape

A última etape consistia em instalar uma ligação telefónica entre 4 postos de corte duma linha de 30 KV ao longo do Vale do Tejo. Neste caso é impossível estabelecer


10 KV
[ALGÉS]
24
23
22
21
CACEM
QUELUZ
AMADORA
BEMFICA
10
9
25
59
30 KV
8
MARVILA
5
POVOA
6
ALHANDRA
7
VILA FRANCA
SERVIÇOS PUBLICOS
01/02
BOA VISTA
18
19
MONTE ESTORIL
17
16
15
14
13
12
11
PAREDE
OEIRAS
PAÇO D'ARCOS
CAXIAS
CRUZ QUEBRADA
ALGÉS
LEGENDA:
Protecção contra alta tensão
Telefone de chamada
Telefone automático
Transformador de protecção
Translator
Aparelho de telefonia de alta freqüência
Telefone receptor de chamada de recurso

TECNICA 700

uma canalização ligando os diferentes postos, quer sejam cabos, quer sejam linhas aéreas.

A solução mais simples e mais prática levou-nos a montar uma instalação de alta freqüência de ondas dirigidas ao longo duma das 3 linhas de transporte de fôrça existentes. A fotografia (fig. 2) junto, mostra na parte superior direita do poste de beton,

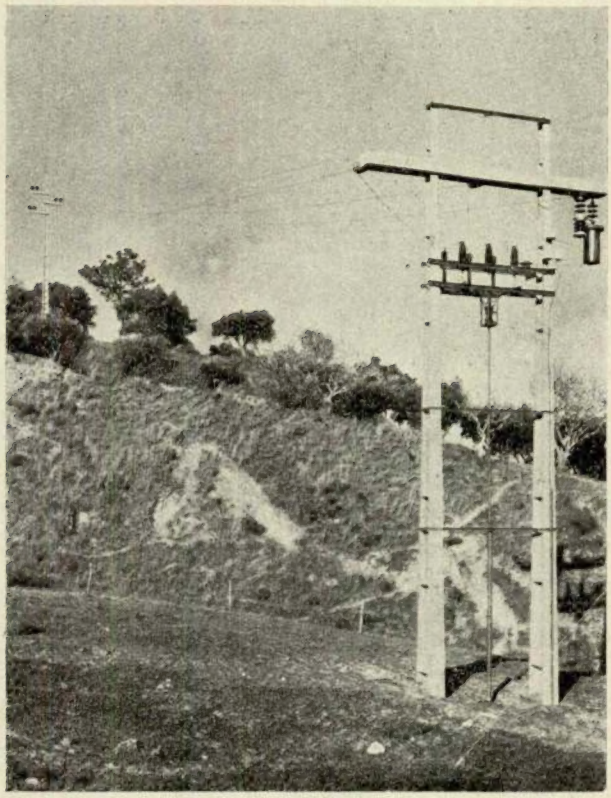


Fig. 2

colocado a um posto de seccionamento, os aparelhos de protecção intercalados entre a linha aérea e o cabo telefónico que vai ligar aos aparelhos telefónicos instalados neste posto.

Quatro sub-estações que fornecem energia à grande industria possuem uma instação de alta freqüência do mais moderno sistema com reguladores automáticos de nível.

Em cada sub-estação encontra-se um telefone, assim como também na casa do guarda. Estes dois aparelhos recebem as chamadas ao mesmo tempo.

Na estação extrema, situada num importante centro rural, foram instalados dois telefones: um para o serviço do pôsto, o outro para o serviço do escritório.

A alimentação da instalação de alta freqüência é assegurada pela rêde de corrente alterna. Em caso de falta de corrente, uma bateria fornece automàticamente a energia a uma comutatriz que alimenta a instalação de alta freqüência.

Com o restabelecimento da energia em corrente alterna, a comutatriz desliga automàticamente e um relais térmico permite ligar a instalação à rêde de energia.

As comunicações entre as 4 sub-estações são completamente automáticas.

* * *

O conjunto dêstes diversos sistemas forma um todo bem homogéneo ligado à central automática da Boa Vista.

Os assinantes desta central podem comunicar segundo a sua necessidade, com os postos ligados às 2 linhas de chamada selectiva e com os postos da linha de alta freqüência.

Todo êste conjunto de telefones privados pode, por sua vez, ser pôsto em comunicação, por um pôsto manual, com a rêde privada dos bombeiros e serviços públicos.

* * *

Como última particularidade, mencionaremos a existência duma central de despacho, em caso de avaria nas rêdes eléctricas.

Por um comutador instalado na central de despacho pode-se entrar em qualquer conversação estabelecida entre 2 assinantes.

Em caso duma irregularidade se produzir no sistema de linhas de chamadas selectivas existentes no referido despacho, 2 aparelhos manuais especiais permitem estabelecer as ligações necessárias com os aparelhos correspondentes, transportáveis.

O esquema junto representa o conjunto das possibilidades da rêde telefónica das CRGE, o qual indica os diferentes sistemas utilizados.

A FIBRA DE VIDRO COMO ISOLANTE TÉRMICO E ACÚSTICO NA CONSTRUÇÃO

PELO ENG.º QUÍMICO J. GIL MONTERO
MADRID

Empregada desde há muito tempo, a lã de vidro como isolante térmico, as suas aplicações nestes últimos anos — especialmente uma vez comprovadas as suas óptimas propriedades como isolante do som — têm-se multiplicado imenso, havendo invadido os mercados com uma rapidez desconhecida entre os produtos industriais de moderna laboração.

Antigamente era obtida por processos rudimentares. Daí o ser muito cara e o ser apenas usada como substância filtrante ou para fabricar pincéis inalteráveis, para medicamentos, ou substâncias cáusticas.

Porém, em quási todos os países, se aperfeiçoam cada vez mais os métodos de fabrico da referida lã.

A fragilidade característica do vidro atenua-se bastante, como é sabido, aquecendo-o até ao rubro sombrio e deixando-o em seguida arrefecer lentamente; essa fragilidade deminue ainda mais — como aliás em todos os corpos — reduzindo o vidro a filamentos. Assim se consegue tornar o vidro dúctil, flexível e até elástico. A fragilidade do vidro fica pràticamente anulada reduzindo-o a filamentos com um diâmetro de um centésimo de milímetro, quere dizer umas dez vezes mais grossos que os da celulose que têm apenas um micron de diâmetro.

Estas fibras de vidro cujo fabrico primitivo consistia em esticar finas varetas de vidro fortemente aquecidas, obtém-se hoje por um processo cuja essência é submeter a massa de vidro líquida a uma forte corrente de ar, sob pressão, a qual a converte numas torcidas mais ou menos semelhantes à lã, e dizemos mais ou menos pois que, igualmente ao que sucede com tôdas as fibras artificiais, sai da fieira com um comprimento indefinido, enquanto que a lã se compõe de pequenas fibras de diferentes comprimentos e espessuras e por isso mesmo os seus tecidos resultam bastante elásticos, moles e esponjosos e pouco compactos podendo assim reter corpúsculos de ar o que conserva o calor.

Esta propriedade pode dar-se às fibras artificiais, cortando-as com diferentes comprimentos, misturando-as e até torcendo-as, como se faz na Alemanha com a fibra de celulose, que mediante um leve recobrimento de albumina adquire propriedades termogéneas e se comporta como a lã de ovelha nas operações de fiação e tinturaria.

A fibra de vidro é incombustível e inatacável pelos ácidos, com excepção do ácido fluorídrico e resiste também à acção das demais substâncias químicas.

À chama do alcool os seus filamentos, tornam-se vermelhos, sem arder, sofrendo porém um princípio de fusão que os transforma numa massa opaca de côr branca que recobra a fragilidade e a dureza do vidro.

Não absorve a umidade, mas retém fácilmente entre as suas fibras os líquidos quer sejam aquosos, alcoólicos ou gordos os quais se difundem e permanecem entre elas apesar do pulimento e regularidade da sua superfície.

Oferece às tesouras uma resistência moderada, que não difere muito da que oferecem as demais fibras, pelo que se corta fàcilmente.

A sua resistência à tracção é no entanto menor que a das outras, pois um trôço de uns dois milímetros de diâmetro, rompe-se sem grande dificuldade, desligando-se e quebrando-se os fios em diversos comprimentos,

Em tôda a parte, quando se fala de medicamentos, produtos químicos ou reagentes, a marca E. Merck goza duma reputação inegualável.

E. Merck

DARMSTADT • FÁBRICA DE PRODUTOS QUÍMICOS • DESDE 1827